

How We Got From There To Here: A Story of Real Analysis

How We Got From There To Here: A Story of Real Analysis

Robert Rogers

SUNY, Fredonia
Fredonia, New York, USA

Eugene C. Boman

Penn State, Harrisburg campus
Harrisburg, PA, USA

Edition: 2.0

©2014 Robert Rogers and Eugene Boman

How We Got from There to Here: A Story of Real Analysis by Robert Rogers and Eugene Boman, is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)¹.

¹creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Agradecimientos

Mactutor While we have tried to tell the story of the development of Real Analysis as completely as possible, our overriding goal was always to teach mathematics, not history. Thus we have necessarily left the history incomplete. The interested student can fill in the gaps we have left by making use of the extensive resources that can be found at the [MacTutor](#)^a history of mathematics repository. All of the portraits of mathematicians used in this text have been taken from MacTutor. MacTutor was created, and is maintained by Professor Edmund Robertson (Emeritus), and Professor John O'Connor (Emeritus), both of the University of St. Andrews in Scotland.

^amathshistory.st-andrews.ac.uk

Desmos The interactive figures in Chapter ?? were created using the [Desmos online calculator](#)^a.

^awww.desmos.com

Sumário

Agradecimentos	iv
1 Para o Instrutor	1
2 Prólogo: Três Lições Antes de Começarmos	3
I IEm que levantamos uma série de questões	
3 Números, Reais ($\mathbb{R}$) e Racionais ($\mathbb{Q}$)	12
4 Cálculo nos séculos XVII e XVIII	20
5 Questões Relacionadas a Séries de Potências	42
II Interregno	
6 Joseph Fourier: O Homem Que Quebrou o Cálculo	54
III In Which We Find (Some) Answers	
7 Convergence of Sequences and Series	63
8 Um“Contaylor” de três restos	77
9 Continuidade: o que não é e o que é	88
10 Valores intermediários e extremos	111

<i>SUMÁRIO</i>	vi
11 Voltar à série Power	125
12 De volta aos números reais	137
13 Epílogos	150
Referências	170
Back Matter	
Índices	172

Capítulo 1

Para o Instrutor

A ironia desta seção é que ela existe para dizer que este livro não foi escrito para você; foi escrito para seus alunos. Afinal, não precisamos ensinar você sobre Análise Real. Você já entende o assunto. O objetivo deste texto é ajudar seus alunos a dar sentido às definições formais, teoremas e provas que encontrarão em seu curso. Fazemos isso imergindo o aluno na história de como o que normalmente é chamado de Cálculo evoluiu para a Análise Real moderna. Nossa esperança e intenção são de que isso ajudará o aluno a apreciar por que sua compreensão intuitiva dos tópicos encontrados no cálculo precisa ser substituída pelo formalismo da Análise Real.

A abordagem tradicional deste tópico (o que poderíamos chamar de "história lógica" da Análise Real), começa com um desenvolvimento rigoroso do sistema de números reais e utiliza isso para fornecer definições rigorosas de limites, continuidade, derivadas e integrais, e convergência de séries; tipicamente nessa ordem. Esta é uma história perfeitamente legítima da Análise Real e, logicamente, faz o maior sentido. De fato, esta é uma visão do assunto que todo matemático em formação deveria eventualmente alcançar. No entanto, nossa alegação é de que seus alunos apreciarão mais o assunto e, esperançosamente, o reterão melhor, se eles observarem como o assunto se desenvolveu a partir das noções intuitivas de Leibniz, Newton e outros nos séculos XVII e XVIII para a abordagem mais moderna desenvolvida nos séculos XIX e XX. Afinal, eles estão abordando isso de um ponto de vista muito semelhante ao dos matemáticos dos séculos XVII e XVIII. Nosso objetivo é levá-los ao século XIX e início do século XX, matematicamente falando.

Apressamo-nos em acrescentar que este não é um livro de história da análise. É um livro didático introdutório sobre Análise Real que utiliza o contexto histórico do assunto para enquadrar os conceitos e mostrar por que os matemáticos sentiram a necessidade de desenvolver definições rigorosas e não intuitivas para substituir suas noções intuitivas.

Você notará que a maioria dos problemas está incorporada nos capítulos, em vez de agrupada no final de cada capítulo. Isso é feito para fornecer um contexto para os problemas, os quais, na maior parte, são apresentados conforme necessário.

Assim, as demonstrações de quase todos os teoremas aparecem como problemas no texto. Claro, seria muito injusto pedir à maioria dos alunos deste nível para provar, por exemplo, o Teorema de Bolzano-Weierstrass sem algum tipo de orientação. Então, em cada caso, fornecemos um esboço da prova e o problema subsequente será usar o esboço para desenvolver uma prova formal. Os esboços de prova se tornarão menos detalhados à medida que os alunos avançam. Descobrimos que esta abordagem ajuda os alunos a desenvolver suas

habilidades de escrita de prova.

No texto, afirmamos e incentivamos você a enfatizar aos seus alunos que muitas vezes eles usarão os resultados dos problemas como ferramentas em problemas subsequentes. Matemáticos treinados fazem isso naturalmente, mas nossa experiência mostra que isso ainda é um tanto estranho para os alunos que estão acostumados simplesmente a "resolver o problema e esquecer". Para referência rápida, os números das páginas dos problemas estão listados no sumário.

Os problemas variam de relativamente simples a mais desafiadores. Alguns deles exigem o uso de um sistema de álgebra computacional (por exemplo, para traçar somas parciais de uma série de potências). Esses tendem a aparecer mais cedo no livro, onde encorajamos os alunos a usar a tecnologia para explorar as maravilhas das séries. Vários desses problemas podem ser resolvidos em uma calculadora gráfica suficientemente avançada ou até mesmo no Wolfram Alpha, então você deve garantir aos seus alunos que eles não precisam ser programadores super habilidosos para fazer isso. Claro, isso fica a seu critério.

Uma estratégia de avaliação que temos usado com sucesso é designar os problemas mais demorados como tarefas a serem recolhidas e os demais como potenciais questões de prova. Os alunos poderiam então receber algum subconjunto desses problemas (literalmente) como uma prova em sala de aula. Isso não só torna a criação da prova mais direta, mas também proporciona a oportunidade de fazer perguntas que não poderiam ser razoavelmente feitas de outra forma em um ambiente de tempo limitado. Nossa experiência mostra que isso não torna as provas "muito fáceis" e existem coisas piores do que ter os alunos estudando e trabalhando juntos em possíveis questões de prova antecipadamente. Se você está chocado com a ideia de dar aos alunos todas as possíveis questões de prova com antecedência, pense em quanto (re)aprendizado você fez estudando a lista de possíveis perguntas que você *sabia* que seriam feitas em um exame de qualificação.

No final, utilize este livro conforme considerar adequado. Acreditamos que seus alunos o acharão de fácil leitura, como é nossa intenção, e estamos confiantes de que isso os ajudará a compreender as definições e teoremas rigorosos e não intuitivos da Análise Real, além de auxiliá-los a desenvolver suas habilidades de escrita de prova.

Se você tiver sugestões para melhorias, comentários ou críticas sobre nosso texto, entre em contato conosco nos endereços de e-mail abaixo. Agradecemos qualquer feedback que você possa nos fornecer sobre isso.

Obrigado.

Robert R. Rogers
robert.rogers@fredonia.edu

Eugene C. Boman
ecb5@psu.edu

Capítulo 2

Prólogo: Três Lições Antes de Começarmos

2.1 Lição Um

Pegue um bloco de papel e anote a resposta para esta pergunta: O que é . . . Não, realmente. Estamos falando sério. *Pegue um bloco de escrever*. Vamos esperar.

Nós *realmente* estamos falando sério sobre isso. Pegue um bloco de papel!

Entendeu? Ótimo. Agora, escreva sua resposta para esta pergunta: O que é um número? Não pense. Não analise. Não considere. Apenas escreva a melhor resposta que puder sem pensar. Você é a única pessoa que precisa ver o que você escreveu.

Terminou? Bom.

Agora, considere o seguinte: Todos os objetos listados abaixo são "números" em um sentido que não vamos explicitar aqui. Quantos deles sua definição inclui?

- 1
- -1
- 0
- $3/5$
- $\sqrt{2}$
- $\sqrt{-1}$
- i^i
- e^{5i}
- $4 + 3i - 2j + 6k$ (Isso é chamado de quaternião.)
- dx (Isso é a diferencial que você aprendeu tudo sobre no cálculo.)
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (Sim, matrizes podem ser consideradas números).

Certamente você incluiu o 1. Talvez tenha incluído o $3/5$. Mas e quanto ao 0? -1 ? Sua definição inclui $\sqrt{2}$? Você considera dx um número? Leibniz considera. E os outros? (E sim, todos eles realmente são "números".)

A lição desta pequena demonstração é esta: você realmente não tem uma noção clara do que queremos dizer quando usamos a palavra "número". E tudo bem. Não saber é aceitável.

Às vezes, até mesmo é encorajador.

O objetivo principal deste curso de estudo é corrigir isso, pelo menos um pouco. Quando o curso terminar, você pode ou não ser capaz de dar uma definição melhor da palavra "número", mas você terá um entendimento mais profundo dos números reais pelo menos. Isso é suficiente por enquanto.

2.2 Lição Dois

Leia e entenda o seguinte desenvolvimento da Fórmula Quadrática.

Suponha $a \neq 0$. Se

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (.1)$$

então

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad (.2)$$

Agora, considere $x = y - \frac{b}{2a}$ resultando em

$$y^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \quad (.3)$$

$$y = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (.4)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (.5)$$

Você conseguiu acompanhar o argumento? Provavelmente, o passo da equação (.1) para a equação (.2) não apresentou dificuldades. Mas e quanto ao próximo passo? Quanto a equação (.3) Você entende de onde veio? Se sim, parabéns para você. A maioria dos estudantes, na verdade, a maioria dos matemáticos, não conseguem dar esse passo mentalmente. Mas você está certo? Existe, talvez, algum pequeno detalhe que você tenha negligenciado?

Verifique.

Ou seja, considere $x = y - \frac{b}{2a}$ na equação (.2) e veja se você consegue entender a equação (.3). Faça isso naquele bloco de papel útil que nós dissemos para você pegar mais cedo. Faça agora. Nós vamos esperar.

Se você *ainda* não pegou um bloco de papel, desista agora. Você vai reprovar neste curso. Sério. Você acha que gastaríamos tanto tempo nisso, que repetiríamos tantas vezes, se não fosse importante? PEGUE UM BLOCO DE PAPEL AGORA! Última chance. Você foi avisado.

Pronto? Muito bem.

Talvez você não tenha conseguido preencher os detalhes por conta própria. Tudo bem. Muitas pessoas não conseguem. Se não conseguir, então peça ajuda: de um colega, um amigo, seu instrutor, quem quer que seja. Infelizmente, a maioria das pessoas não busca ajuda nesta situação. Em vez disso, elas percebem isso como um "fracasso", escondem isso e se repreendem ou ao problema como

"estúpido". Em resumo, elas deixam suas inseguranças pessoais e medos as dominarem. *Não faça isso. Busque ajuda.* Você não é nem burro nem incapaz. Existem mil razões pelas quais, em um determinado dia, você pode não conseguir resolver este problema. Mas não deixe um dia ruim interferir no propósito pela qual você está aqui. Consiga alguém para ajudá-lo a superar este obstáculo. Mais tarde, você poderá ajudar seu ajudante da mesma forma. Sério.

Neste ponto, assumimos que você tenha compreendido com sucesso a passagem da [equação \(.2\)](#) para a [equação \(.5\)](#).

Viu só? Na verdade, não foi tão ruim afinal. Apenas um monte de álgebra elementar. Agora que você fez (ou viu ser feito), é fácil perceber que não era tão complicado assim.

Mas esse é o ponto! Deixamos esses cálculos de fora justamente porque sabíamos que eram rotineiros e que você poderia preencher os detalhes. Além disso, preencher os detalhes por conta própria oferece um pouco mais de compreensão sobre os cálculos. Se tivéssemos preenchido para você, teríamos roubado essa compreensão. E teríamos feito este livro mais longo do que precisa ser. Não queremos fazer nenhuma dessas coisas. Se preenchermos todos os detalhes de cada cálculo para você, você não aprenderá a ter confiança na sua capacidade de fazê-los sozinho. E este livro facilmente dobraria de tamanho.

Portanto, a lição aqui é a seguinte: Mantenha aquele bloco de papel à mão sempre que estiver lendo este (ou qualquer outro) texto de matemática. Você vai precisar dele. Cálculos rotineiros muitas vezes serão omitidos. Mas chamá-los de "rotineiros" e omiti-los não significa que sejam insignificantes. Se fossem verdadeiramente insignificantes, os deixaríamos de fora completamente.

Além disso, "rotineiro" não significa "óbvio". Cada passo que demos no desenvolvimento da Fórmula Quadrática foi "rotineiro". Mas até mesmo os cálculos rotineiros precisam ser compreendidos, e a melhor maneira de entendê-los é fazendo-os. Esta é a maneira de aprender matemática; é a *única* maneira que realmente funciona. Não prive a si mesmo da sua aprendizagem matemática pulando as partes mais importantes.

Se você não preencheu esses detalhes, está sendo tolo (ou pelo menos excessivamente teimoso). Há uma boa razão para colocar essas três lições em primeiro lugar. Pare de desperdiçar seu tempo e sua inteligência! Vá fazer isso agora.

Como você viu quando preencheu os detalhes do nosso desenvolvimento da Fórmula Quadrática, a substituição $x = y - \frac{b}{2a}$ foi crucial porque transformou a

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

em

$$y^2 = k$$

onde k depende apenas de a , b , e c . No século XVI, uma técnica similar foi utilizada por Ludovico Ferrari (1522-1565) para reduzir a equação cúbica geral.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (.6)$$

na chamada "equação cúbica reduzida"

$$y^3 + py + q = 0$$

onde p , e q dependem apenas de a , b , c , e d .

A equação cúbica reduzida geral já havia sido resolvida por Tartaglia (o Gago, 1500-1557), então converter a cúbica geral em uma cúbica reduzida forneceu um caminho para Ferrari calcular a "Fórmula Cúbica"— semelhante à Fórmula Quadrática, mas melhor.

Não está totalmente claro por que eliminar o termo quadrático deveria ser considerado "redução", mas é assim que é.

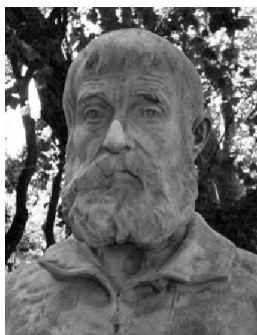


Figure 2.1 [Tartaglia](#)², "O Gago"

Ferrari também sabia como calcular a solução geral da "quártica reduzida", então quando ele e seu professor Girolomo Cardano (1501-1576) descobriram como reduzir uma quártica geral, eles também obtiveram uma solução completa para ela.



Figure 2.2 [Girolomo Cardano](#)³

Infelizmente, seus métodos falharam completamente quando tentaram resolver a equação quártica geral. Lamentavelmente o resto desta história pertence a um curso de Álgebra Abstrata, não de Análise Real. Mas a lição desta história aplica-se a toda a matemática: cada problema resolvido é um novo teorema que, então, se torna uma ferramenta para uso futuro. Reduzir uma cúbica teria sido completamente inútil se Tartaglia não tivesse uma solução para a cúbica reduzida em mãos. A técnica que eles usaram, com pequenas modificações, permitiu então a solução da quártica geral também.

Considere isso enquanto você avança neste curso e em sua jornada de aprendizagem matemática. Cada problema que você resolve é, na verdade, um teorema, uma ferramenta potencial para uso futuro. Seleccionamos os problemas deste texto intencionalmente com isso em mente. Não se limite a resolver os problemas e avançar. Resolver um problema não significa que você deve parar de pensar nele. Mantenha-se atento e continue refletindo sobre os problemas que já resolveu. Absorva-os completamente. Assimile as ideias de forma que, quando necessitar delas futuramente, estejam prontamente acessíveis para uso.

Problema 2.3

- (a) Encontre M de modo que a substituição $x = y - M$ diminua o grau da [equação \(6\)](#), a equação cúbica geral. Em seguida, encontre p e q em

⁴mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Tartaglia/

⁵mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cardan

termos de a , b , c , e d .

- (b) Encontre K para que a substituição $x = y - K$ reduza o grau da equação quártica geral. Certifique-se de demonstrar como obteve esse valor ou por que ele funciona (se você o adivinhou).
- (c) Encontre N para que a substituição $x = y - N$ reduza um polinômio de grau n . Da mesma forma, mostre que esse valor funciona ou como você o obteve.

□

Problema 2.4 Outra Derivação da Fórmula Quadrática. Aqui está mais uma maneira de resolver uma equação quadrática. Leia o desenvolvimento abaixo com lápis e papel à mão. Confirme todos os cálculos que não forem completamente transparentes para você. Tem seguida, use suas anotações para apresentar a solução com *todos* os passos finais.

Certifique-se de ter claro o propósito deste problema antes de começar. Não se trata de resolver a equação quadrática. Você já sabe como fazer isso. Nosso objetivo aqui é dar-lhe a prática de preencher os detalhes ignorados da exposição matemática. Escolhemos este problema específico porque deveria ser um ambiente confortável para você, mas esta solução específica provavelmente está fora de sua experiência anterior.

Suponha que r_1 e r_2 são soluções de $ax^2 + bx + c = 0$. Sem perda de generalidade, suponha que $a > 0$. Suponha ainda que $r_1 \geq r_2$. Então

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x - r_1)(x - r_2) \\ &= a[x^2 - (r_1 + r_2)x + (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 - 3r_1r_2]. \end{aligned}$$

Portanto

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \quad (.7)$$

e

$$r_1 - r_2 = \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{4c}{a}}. \quad (.8)$$

Equação (.7) e (.8) podem ser resolvidas simultaneamente para obter

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ r_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

□

2.3 Lição 3

Na correria típica de um semestre universitário, com muitas demandas sobre o seu tempo e muito pouco tempo para refletir, torna-se muito fácil ver cada problema que você resolve como uma pequena vitória isolada e depois seguir para o próximo desafio. Isso é compreensível. Cada problema que você resolve é de fato uma pequena vitória e você tem todo o direito de se orgulhar disso. No entanto, não é uma questão isolada, e é um equívoco pensar assim.



Figure 2.5 [George Polya](#)⁴

No seu livro *Como Resolver Problemas* o matemático e professor George Polya deu quatro passos para resolver problemas. Os passos podem ser parafraseados como

1. Entender o problema.
2. Formular um plano.
3. Executar o plano.
4. Refletir sobre o que você fez.

Este processo é iterativo. Ou seja, uma vez que um plano é formulado e executado, frequentemente descobrimos que nosso plano não foi suficiente para a tarefa. Portanto, precisamos questionar o que deu errado, formular um novo plano e tentar novamente. Este é o quarto passo: Refletir sobre o que você fez.

Quase todo mundo se lembra desse quarto passo quando o plano *não* funciona. Afinal, você tem que tentar de novo, então é preciso perguntar o que deu errado. Mas é muito fácil negligenciar esse crucial quarto passo quando o plano tem sucesso. Nesse caso, cheios de sucesso, geralmente seguimos para o próximo problema e recomeçamos do zero.

Este é um erro. Ter resolvido um problema não é motivo para parar de pensar nele.

Esse quarto passo é importante tanto quando nós tivemos sucesso quanto quando nós falhamos. Cada vez que você resolve um problema, pare e se faça algumas perguntas:

- Existem algumas consequências simples que decorrem do resultado?
- Como ele se encaixa no esquema mais amplo de outros problemas que você resolveu?
- Como poderia ser usado no futuro?

Também, observe a estrutura do problema. Algumas suposições tiveram que ser feitas. Quais foram elas? Todas foram necessárias? Ou seja, sua solução utilizou tudo o que foi assumido? Se não, você pode ter algo consideravelmente mais geral do que parece à primeira vista. Qual é essa afirmação mais geral? Mesmo que você tenha usado todas as suposições, isso foi realmente necessário? Você pode resolver um problema similar com suposições mais fracas?

Dê um momento para assimilar todas essas perguntas (e suas respostas) em sua mente, para que quando você veja algo semelhante no futuro, seja lembrado delas. *Não* resolva um problema e depois o esqueça e siga em frente. A natureza

⁴mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Polya/

da matemática é cumulativa. Lembre-se, você não está aqui para acumular pontos de nota. Você está aqui para aprender e entender os conceitos e métodos da matemática, para ganhar "maturidade matemática". Parte desse processo de maturação é a acumulação de um conjunto de fatos (teoremas) e técnicas que podem ser usadas para provar novos teoremas (resolver novos problemas).

Este texto foi escrito pensando no processo de amadurecimento. Você descobrirá frequentemente que os problemas que você resolve hoje podem ser usados com bons resultados naqueles que você tentará amanhã, mas somente se você se lembrar deles. Portanto, depois de resolver cada problema, reserve um momento para pensar em como ele se encaixa nos padrões que você já conhece. Isso é importante o suficiente para ser repetido: *Um problema, uma vez resolvido, torna-se uma ferramenta para resolver problemas subsequentes!*

O objetivo da seguinte sequência de problemas é ajudá-lo a se acostumar com essa noção (se você ainda não estiver). É uma progressão de resultados sobre números primos. Como você provavelmente se lembra, um número primo é qualquer inteiro maior que 1 cujos únicos fatores são ele mesmo e 1. Por exemplo, 2, 3, 5, 7, 11 são primos, enquanto 4, 6, 9 não são. Um resultado importante sobre números primos é o seguinte:

Teorema 2.6 O Teorema Fundamental da Aritmética

Qualquer inteiro maior que 1 é ou primo ou é um produto de números primos. Além disso, essa decomposição em primos é única até a ordem dos fatores.

Não vamos provar isso, mas vamos usá-lo como ponto de partida para examinar os seguintes problemas. Enquanto você faz esses problemas, observe como os problemas subsequentes fazem uso dos resultados anteriores.

Observe que a notação $p|a$ simplesmente significa que o inteiro p divide o inteiro a sem deixar resto.

Problema 2.7 Pequeno Teorema de Ermat, passo 1. Seja p um número primo e a, b inteiros positivos tais que $p|(a \cdot b)$. Mostre que $p|a$ ou $p|b$.

Dica. Se $p|a$ então terminamos. Caso contrário, observe que p é um fator primo de $a \cdot b$. O que o Teorema Fundamental da Aritmética diz sobre os fatores primos de $a \cdot b$ comparados aos fatores primos de a e b ? $\square$

Problema 2.8 Pequeno Teorema de Fermat, passo 2. Seja p um número primo e seja $a_1, a_2, \dots, a_n$ sejam inteiros positivos tais que $p|(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n)$. Mostre que $p|a_k$ para algum $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Dica. Use indução em n e no resultado do problema anterior. $\square$

Problema 2.9 Pequeno Teorema de Fermat, passo 3. Seja p um número primo e seja k um número inteiro com $1 \leq k \leq p-1$. Prove que $p \nmid \binom{p}{k}$, onde $\binom{p}{k}$ é o coeficiente binomial $\frac{p!}{k!(p-k)!}$.

Dica. $\binom{p}{k} k!(p-k)!$. Como o resultado anterior se aplica? $\square$

Agora temos todo o mecanismo necessário para provar um dos teoremas mais legais da teoria dos números.

Teorema 2.10 Pequeno Teorema de Fermat

Seja p qualquer número primo. Então $p|(n^p - n)$ para todos os inteiros positivos n .

Problema 2.11 Pequeno Teorema de Fermat. Prove o Pequeno Teorema de Fermat.

Dica. Use indução em n . Para ir de n a $n+1$, use o teorema binomial em $(n+1)^p$. $\square$

O Pequeno Teorema de Fermat é a base fundamental para uma série de resultados em teoria dos números e criptografia.

Parte I

Em que levantamos uma
série de questões

Capítulo 3

Números, Reais ($\mathbb{R}$) e Racionais ($\mathbb{Q}$)

O conjunto dos números reais (denotado, $\mathbb{R}$) é mal nomeado. Os números reais não são mais ou menos reais — no sentido não matemático de que eles existem — do que qualquer outro conjunto de números, como o conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$), o conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) ou o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$). O nome “números reais” é (quase) uma anomalia histórica, semelhante ao nome “Teorema de Pitágoras”, que na verdade era conhecido e compreendido muito antes de Pitágoras viver.

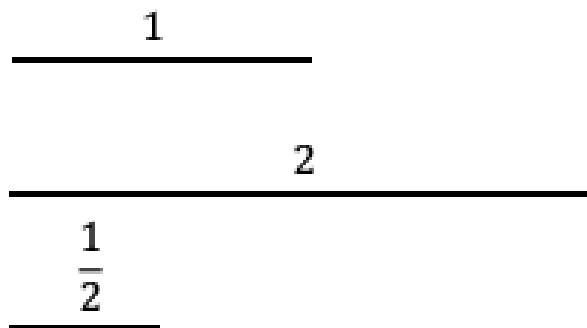
Quando o cálculo estava sendo inventado no século 17, os números eram completamente compreendidos, ou pelo menos assim se acreditava.

Alguns diriam "reinventado". Veja [13], ou [9].

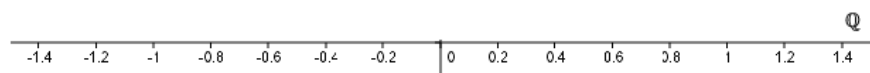
Afinal de contas, eles eram apenas números. Combine-os. Chamamos isso de adição. Se você os adicionar repetidamente, chamamos isso de multiplicação. Subtração e divisão eram compreendidas de maneira semelhante.

Era (e ainda é) útil visualizar essas coisas de uma maneira mais concreta. Se pegarmos uma vara de comprimento 2 e outra de comprimento 3 e as colocarmos ponta a ponta, obtemos um comprimento de 5. Isso é adição. Se as colocarmos ponta a ponta, mas em ângulo reto, então nossas duas varas são o comprimento e a largura de um retângulo cuja área é 6. Isso é multiplicação.

Claro que medir comprimentos com números inteiros tem limitações, mas estas não são difíceis de corrigir. Se temos uma vara de comprimento 1 e outra de comprimento 2, então podemos encontrar outra cujo comprimento, quando comparado a 1, é o mesmo (tem a mesma proporção) que 1 tem para 2. Esse número, claro, é $1/2$.

**Figure 3.1**

Observe como a notação de fração reflete a operação de comparar 1 com 2. Essa comparação geralmente é chamada de *razão* de 1 para 2, então números desse tipo são chamados de *números racionais*. O conjunto dos números racionais é denotado por $\mathbb{Q}$, de quocientes. Na escola primária, eles foram apresentados a você como frações. Uma vez que as frações são compreendidas, essa visualização usando segmentos de linha (varas) leva naturalmente à sua representação na reta numérica racional.

**Figure 3.2** A Reta Numérica Racional

Isso parece funcionar como uma visualização porque os números racionais e os pontos em uma linha parecem compartilhar certas propriedades. A principal delas é que entre dois pontos na reta racional há outro ponto, assim como entre dois números racionais há outro número racional.

Problema 3.3 Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ e encontre um número racional entre a/b e c/d . $\square$

Tudo isso é muito claro e satisfatório até que o examinamos um pouco mais de perto. Então, torna-se bastante misterioso. Considere novamente os números racionais a/b e c/d . Se pensarmos neles como comprimentos, podemos perguntar: "Existe um terceiro comprimento, digamos α , tal que possamos dividir a/b em M partes, cada uma de comprimento α e também dividir c/d em N partes, cada uma de comprimento α ?" Alguns minutos de reflexão devem convencê-lo de que isso é o mesmo que o problema de encontrar um denominador comum, então $\alpha = \frac{1}{bd}$ funcionará bem. (Confirme isso você mesmo.)

Você pode estar se perguntando por que estamos fazendo todo esse alarde. *Obviamente* isso é *sempre* verdadeiro. Na verdade, o parágrafo anterior dá um esboço de uma prova muito boa disso. Aqui estão o teorema e sua prova apresentados formalmente.

Teorema 3.4 *Suponha que $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ sejam inteiros. Existe um número $\alpha \in \mathbb{Q}$ tal que $M\alpha = a/b$ e $N\alpha = c/d$, onde M e N também são inteiros.*

Proof. Para provar este teorema, vamos mostrar α , M e N . É sua responsabilidade confirmar se eles realmente funcionam. Aqui estão eles: $\alpha = \frac{1}{bd}$, $M = ad$ e $N = cb$. $\blacksquare$

Problema 3.5 Confirme que α , M e N conforme dados na prova do Teorema 3.4 satisfazem os requisitos do teorema. $\square$

O Teorema 3.4 sugere a seguinte questão muito profunda e importante: Existem comprimentos que *não* podem ser expressos como a razão de dois comprimentos inteiros? A resposta, é claro, é sim. Caso contrário, não teríamos feito a pergunta. Observe que para tais números, nossa prova do Teorema 3.4 não é válida (por quê?).

Um dos exemplos mais conhecidos de tal número é a circunferência de um círculo com diâmetro 1. Este é o número geralmente denotado por π . Mas os círculos são objetos extremamente complexos — eles só parecem simples porque são tão familiares. Surgindo como surge de um círculo, você esperaria que o número π também fosse muito complexo e isso é verdade. Na verdade, π é um número excepcionalmente estranho por uma variedade de razões. Vamos começar com algo um pouco mais fácil de pensar.

Quadrados são simples. Dois conjuntos de linhas paralelas em ângulos retos, todas do mesmo comprimento. O que poderia ser mais simples? Se construirmos um quadrado com lados de comprimento 1, então sua diagonal terá comprimento $\sqrt{2}$.

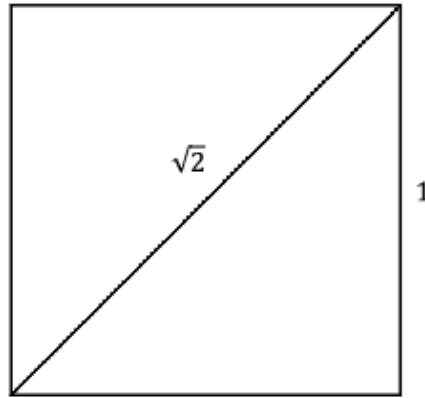


Figure 3.6 A construction of $\sqrt{2}$

Este é um número que não pode ser expresso como a *razão* de dois inteiros. Ou seja, ele é *irracional*. Isso é conhecido desde os tempos antigos, mas ainda é bastante desconcertante quando encontrado pela primeira vez. Parece tão contra-intuitivo que o intelecto se rebela. "Isso não pode estar certo", diz. "Isso é simplesmente louco!"

No entanto, é verdade e podemos provar que é verdade da seguinte forma. O que acontece se supusermos que a raiz quadrada de dois pode ser expressa como uma razão de inteiros? Vamos mostrar que isso leva irrevogavelmente a uma conclusão que manifestamente não é verdadeira.

Suponha $\sqrt{2} = a/b$, onde a e b são inteiros. Suponha ainda que a fração a/b esteja na forma mais simplificada. *Esta suposição é crucial porque se a/b está na forma mais simplificada, sabemos que no máximo apenas um deles é par.*

So

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos:

$$a^2 = 2b^2.$$

Portanto, a^2 é par. Mas se a^2 é par, então a também deve ser par (por quê?). Se a é par, então $a = 2k$ para algum inteiro k . Portanto,

$$4k^2 = 2b^2 \text{ ou}$$

$$2k^2 = b^2.$$

Portanto, b^2 também é par e, portanto, b também deve ser par. Mas isso é impossível. Acabamos de concluir que a e b são ambos pares, e essa conclusão decorre diretamente da nossa suposição inicial de que no máximo um deles poderia ser par.

Isso não faz sentido. Onde está nosso erro? Não está em nenhum passo individual do nosso raciocínio. Tudo estava sólido. Verifique novamente para ter certeza.

Portanto, nosso erro deve estar na suposição inicial de que $\sqrt{2}$ poderia ser expresso como uma fração. Essa suposição, portanto, deve ser falsa. Em outras palavras, $\sqrt{2}$ não pode ser expresso dessa forma.

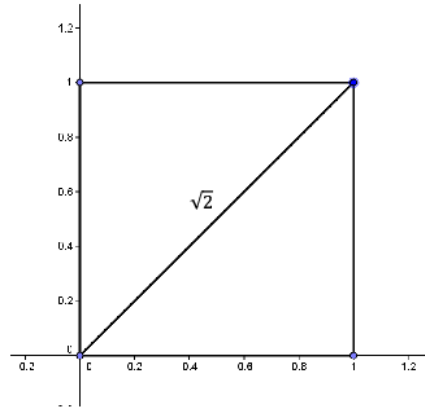
Problema 3.7 Números Irracionais. Mostre que cada um dos seguintes números é irracional:

- (a) $\sqrt{3}$
- (b) $\sqrt{5}$
- (c) $\sqrt[3]{2}$
- (d) $i (= \sqrt{-1})$
- (e) A raiz quadrada de todo número inteiro positivo que não é o quadrado de um inteiro.

□

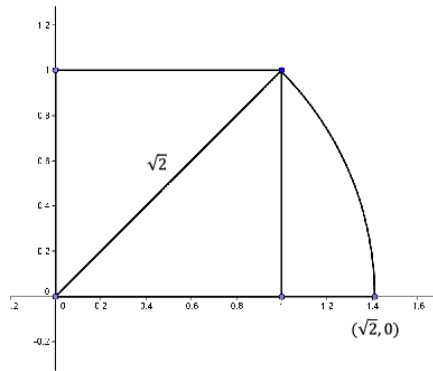
O fato de que $\sqrt{2}$ não é racional é interessante e curioso, mas a menos que, como os pitagóricos da Grécia Antiga, você tenha uma convicção religiosa profundamente enraizada de que todos os números são racionais, isso não parece muito importante. Por outro lado, a mera existência de $\sqrt{2}$ levanta algumas questões interessantes. Por exemplo, o que o símbolo $4^{\sqrt{2}}$ pode possivelmente significar? Se o expoente fosse um número racional, digamos m/n , então claramente $4^{m/n} = \sqrt[n]{4^m}$. Mas já que $\sqrt{2} \neq m/n$ para *nenhum* inteiros m e n , como interpretamos $4^{\sqrt{2}}$? Isso tem algum significado? Quanto mais você pensa sobre isso, mais intrigante se torna a existência de números irracionais. Suponha, por exemplo, que reconsideremos a construção de um segmento de linha de comprimento $\sqrt{2}$. É claro que a construção funciona e que realmente podemos construir tal segmento de linha. Ele existe.

Repita a construção, mas desta vez vamos colocar o lado da base na linha racional.

**Figure 3.8**

Nós sabemos que a diagonal deste quadrado é $\sqrt{2}$ como indicado. E nós sabemos que $\sqrt{2}$ não é um número racional.

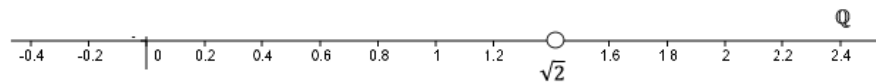
Agora deixe a diagonal fixada em $(0,0)$ mas permita que ela gire para baixo de forma que coincida com o eixo x .

**Figure 3.9**

O fim da nossa diagonal irá traçar um arco do círculo com raio $\sqrt{2}$. Quando a diagonal coincidir com o eixo x , seu ponto final será obviamente o ponto $(\sqrt{2}, 0)$ como mostrado.

Mas espere! Estamos usando a linha de números *racionais* para o nosso eixo x . Isso significa que os únicos pontos no eixo x são aqueles que correspondem a números racionais (frações). Mas nós sabemos que $\sqrt{2}$ não é racional! Conclusão: Não há nenhum ponto $(\sqrt{2}, 0)$. Ele simplesmente não existe.

Dito de outra forma, há um buraco na linha dos números racionais exatamente onde $\sqrt{2}$ deveria estar.

**Figure 3.10**

Isso é estranho!

Lembre-se de que entre quaisquer dois números racionais sempre existe outro. Esse fato foi o que nos levou a representar os números racionais com uma linha em primeiro lugar.

Mas é ainda pior que isso. É fácil mostrar que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, etc. também são

irracionais. Assim como π e e , embora não sejam tão fáceis de mostrar. Parece que a linha racional tem um monte de buracos nela. Infinitos.

E ainda assim, o seguinte teorema é verdadeiro

Teorema 3.11

(a) *Entre quaisquer dois números reais distintos existe um número racional.*

(b) *Entre quaisquer dois números reais distintos existe um número irracional.*

Ambas as partes deste teorema dependem de um uso criterioso do que agora é chamado de Propriedade Arquimediana do Sistema de Números Reais, que pode ser formalmente declarada da seguinte forma.

Princípio 3.12 A Propriedade Arquimediana. *Dados dois números reais positivos, a e b , existe um número inteiro positivo, n , tal que $na > b$.*

Fisicamente, isso diz que podemos esvaziar um oceano b com uma colher de chá a , desde que estejamos dispostos a usar a colher de chá muitas vezes n .

Este é um conceito tão intuitivamente simples que é fácil aceitá-lo sem prova. Até a invenção do cálculo, e mesmo por algum tempo depois, ele era simplesmente assumido. No entanto, à medida que os problemas fundamentais apresentados pelos conceitos de cálculo foram compreendidos e resolvidos, acabamos sendo conduzidos a uma compreensão mais profunda das complexidades do sistema de números reais. A Propriedade Arquimediana não é mais considerada como um axioma não provado, mas sim entendida como uma consequência de outros axiomas. Mostraremos isso mais tarde, mas por enquanto a aceitaremos como obviamente verdadeira, assim como fez Arquimedes.

Com a invenção do cálculo, os matemáticos do século XVII começaram a usar objetos que não satisfaziam a Propriedade Arquimediana (na verdade, o mesmo aconteceu com Arquimedes). Como veremos no próximo capítulo, quando Leibniz escreveu o primeiro artigo sobre sua versão do cálculo, ele seguiu essa prática ao estabelecer explicitamente regras para manipular quantidades infinitamente pequenas (infinitesimais). Essas foram consideradas números reais que não são zero e ainda assim menores do que qualquer número real. A notação que ele usou foi dx (um deslocamento infinitamente pequeno na direção x) e dy (um deslocamento infinitamente pequeno na direção y). Esses símbolos devem parecer familiares para você. Eles são os mesmos dy e dx usados para formar o símbolo da derivada $\frac{dy}{dx}$ que você aprendeu no cálculo.

Matemáticos dos séculos XVII e XVIII fizeram progressos científicos e matemáticos incríveis explorando esses infinitesimais, mesmo que eles fossem fundamentalmente suspeitos. Não importa quantas vezes você adicione o infinitesimal dx a si mesmo, o resultado não será maior do que, digamos, 10^{-1000} , o que é muito bizarro.

Quando questões fundamentais vieram à tona, os infinitesimais caíram um pouco em desuso. Você provavelmente não os usou muito no cálculo. Na maioria das vezes, você provavelmente usou a notação de prime, $f'(x)$, introduzida por Lagrange no século XVIII. Alguns dos temas deste livro são: Por que os diferenciais caíram em desuso, com o que foram substituídos e como as notações modernas que você aprendeu no cálculo evoluíram ao longo do tempo.

Para concluir esta digressão sobre a Propriedade Arquimediana, a ideia de infinitesimais foi revisitada no século XX pelo lógico Abraham Robinson em [12]. Robinson conseguiu colocar a ideia de infinitesimais em uma base lógica sólida. Mas, no século XVIII, a existência de números infinitesimais era, no mínimo, instável. No entanto, isso não impediu os matemáticos de explorar com sucesso essas quantidades infinitamente pequenas.

Voltaremos a essa saga em capítulos posteriores, mas, por enquanto, retor-

namos ao [Teorema 3.11](#).

Esboço da Prova. Esboçaremos a prova da parte (a) do [Teorema 3.11](#) e indicaremos como ela pode ser usada para provar a parte (b).

Suponha que α e β sejam números reais com $\alpha > \beta$. Existem dois casos.

- *Caso 1:*

$\alpha - \beta > 1$. Neste caso, há pelo menos um número inteiro entre α e β . Como os inteiros são racionais, terminamos.

- *Caso 2:*

$\alpha - \beta \leq 1$. Neste caso, pela Propriedade Arquimediana, existe um número inteiro positivo, digamos n , tal que $n(\alpha - \beta) = n\alpha - n\beta > 1$. Agora haverá um número inteiro entre $n\alpha$ e $n\beta$. Você deve ser capaz de encontrar um número racional entre α e β . ■

Para a parte b, divida α e β por qualquer número irracional positivo e aplique a parte a. Há alguns detalhes a serem considerados. Estes são abordados no seguinte problema.

Problema 3.13

- (a) Prove que o produto de um número racional não nulo e um número irracional é irracional.
- (b) Use o resultado da parte (a) para provar Parece que você gostaria da tradução do hiperlink para o Teorema referenciado. Aqui está a tradução preservando os códigos do Overleaf:

[Teorema 3.11](#). □

Na prática, a existência de números irracionais não é realmente muito importante. À luz do [Teorema 3.11](#), qualquer número irracional pode ser aproximado arbitrariamente próximo por um número racional. Então, se estamos projetando uma ponte e precisamos de $\sqrt{2}$, simplesmente usamos 1,414 em seu lugar. O erro introduzido é inferior a $0,001 = 1/1000$, então provavelmente não importa.

Mas do ponto de vista teórico, isso é devastador. Quando o cálculo foi inventado, os números racionais de repente não eram suficientes para justificar os conceitos e operações que precisávamos usar.

Newton fundamentou explicitamente sua versão do cálculo na suposição de que podemos pensar em quantidades variáveis como sendo geradas por um movimento contínuo. Se nosso sistema numérico tiver buracos, tal movimento contínuo é impossível porque não temos como pular sobre os vazios. Então, Newton simplesmente postulou que não havia buracos. Ele preencheu o buraco onde $\sqrt{2}$ deveria estar. Ele simplesmente disse: sim, há um número lá chamado $\sqrt{2}$ e fez o mesmo com todos os outros buracos.

Para ter certeza, não há registro de Newton dizendo explicitamente: "Aqui está como vou preencher os buracos na reta numérica racional." Assim como todos os outros na época, ele simplesmente assumiu que não havia buracos e seguiu em frente. Levou cerca de 200 anos de quebra-cabeças e discussões sobre as contradições, anomalias e paradoxos para trabalhar nas consequências dessa suposição aparentemente simples. A tarefa pode ainda não estar totalmente concluída, mas no século XX as propriedades do sistema de números reais ($\mathbb{R}$) como uma extensão do sistema de números racionais ($\mathbb{Q}$) estavam bem

compreendidas. Aqui estão ambos os sistemas visualizados como linhas:

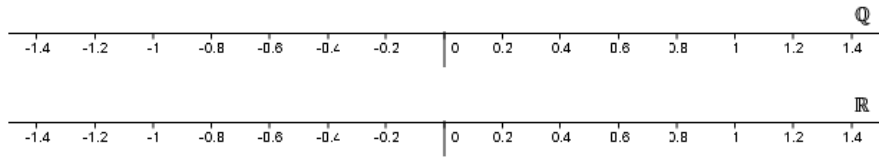


Figure 3.14 $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$

Impressionante, não é?

A razão pela qual eles se parecem, exceto pelos rótulos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$, é que nossa habilidade de desenhar esboços dos objetos que estamos estudando falha completamente quando tentamos esboçar $\mathbb{R}$, diferente de $\mathbb{Q}$. Todos os buracos em $\mathbb{Q}$ realmente estão lá, mas os não-buracos estão tão próximos uns dos outros que não conseguimos separá-los em um desenho. Essa incapacidade de esboçar os objetos que estudamos será uma fonte frequente de frustração.

É claro, isso não nos impedirá de fazer esboços. Quando o fizermos, nossa imaginação nos salvará porque é possível *imaginar* $\mathbb{Q}$ como diferente de $\mathbb{R}$. No entanto, devemos abandonar a ideia de que um esboço é uma representação precisa de qualquer coisa. No máximo, nossos esboços serão apenas auxílios para a imaginação.

Neste ponto, simplesmente vamos assumir a existência dos números reais. Também assumiremos que eles possuem todas as propriedades com as quais estamos acostumados. Isso é perfeitamente aceitável desde que tornemos nossas suposições explícitas. No entanto, precisamos estar cientes de que, até agora, a existência e as propriedades dos números reais são uma *suposição* que não foi derivada logicamente. Sempre que fazemos uma suposição, precisamos estar preparados para abandoná-la completamente se descobrirmos que ela leva a resultados absurdos, ou para reexaminar a suposição à luz desses resultados para ver se podemos encontrar outra suposição que abranja a primeira e explique os resultados (aparentemente) absurdos.

3.1 Problemas Adicionais

Problema 3.15 Determine se cada um dos itens a seguir é sempre racional ou sempre irracional. Justifique suas respostas.

- (a) A soma de dois números racionais.
- (b) A soma de dois números irracionais.
- (c) A soma de um número racional e um número irracional.

□

Problema 3.16 É possível ter dois números racionais, a e b , tal que a^b é irracional? Se sim, mostre um exemplo de a e b . Caso contrário, prove que não é possível. □

Problema 3.17 Decida se é possível ter dois números irracionais, a e b , tais que a^b seja racional. Prove em ambos os casos. □

Capítulo 4

Cálculo nos séculos XVII e XVIII

4.1 Newton e Leibniz: primeiros passos

4.1.1 Regras de cálculo de Leibniz



Figure 4.1 [Gottfried Wilhelm Leibniz](#)⁵

As regras para o cálculo foram estabelecidas pela primeira vez no artigo de Gottfried Wilhelm Leibniz de 1684 *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales, quantitates moratur, et singulare pro illi calculi gênero* (Um novo método para máximos e mínimos, bem como tangentes, que não é impedido nem por quantidades fracionárias nem por quantidades irracionais, e um tipo notável de cálculo para isso). Leibniz começou com subtração. Ou seja, se x_1 e x_2 estão muito próximos, então a diferença deles, $\Delta x = x_2 - x_1$, é muito pequeno. Ele expandiu essa ideia para dizer que se x_1 e x_2 estão *infinitamente* próximos (mas ainda distintos), então sua diferença, dx , é infinitamente pequena (mas não zero).

Cálculo Diferencial. Isso se traduz, vagamente, como o cálculo das diferenças.

Esta ideia é logicamente muito suspeita e Leibniz sabia disso. Mas ele também sabia que quando usava seu cálculo diferencial estava obtendo respostas corretas para alguns problemas muito difíceis. Então ele perseverou.

Leibniz chamou ambos Δx e dx de “diferenciais” (latim para diferença) porque ele pensava neles como, essencialmente, a mesma coisa. Com o tempo,

⁵mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Leibniz/

tornou-se habitual referir-se ao infinitesimal dx como um diferencial, reservando a “diferença” para o caso finito, Δx . É por isso que o cálculo é frequentemente chamado de “cálculo diferencial”.

No seu artigo, Leibniz forneceu regras para lidar com estes diferenciais infinitamente pequenos. Especificamente, dada uma quantidade variável x , dx representou uma mudança infinitesimal em x . Os diferenciais estão relacionados através da inclinação da linha tangente a uma curva. Ou seja, se $y = f(x)$, então dy e dx estão relacionados por

$$dy = (\text{inclinação da linha tangente}) \cdot dx.$$

Leibniz então dividido por dx dando

$$\frac{dy}{dx} = (\text{inclinação da linha tangente}).$$

A notação elegante e expressiva inventada por Leibniz foi tão útil que foi mantida ao longo dos anos, apesar de algumas mudanças profundas nos conceitos subjacentes. Por exemplo, Leibniz e seus contemporâneos teriam visto o símbolo $\frac{dy}{dx}$ como um quociente real de infinitesimais, enquanto hoje o definimos através do conceito de limite sugerido pela primeira vez por Newton.

Como resultado, as regras que regem essas diferenciais têm uma aparência muito moderna:

$$\begin{aligned} d(\text{constante}) &= 0 \\ d(z - y + w + x) &= dz - dy + dw + dx \\ d(xv) &= x dv + v dx \\ d\left(\frac{v}{y}\right) &= \frac{y dv - v dy}{yy} \end{aligned}$$

e, quando a é um número inteiro:

$$d(x^a) = ax^{a-1} dx.$$

Leibniz afirma estas regras sem provas: “. . . a demonstração de tudo isso será fácil para quem tem experiência em tais assuntos. . .” Como exemplo, seria de se esperar que os matemáticos da época de Leibniz entendessem intuitivamente que se c é uma constante, então $d(c) = c - c = 0$. Da mesma forma, $d(x + y) = dx + dy$ é realmente uma extensão de $(x_2 + y_2) - (x_1 + y_1) = (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)$.

4.1.2 A abordagem de Leibniz para a regra do produto

A explicação da regra do produto usando diferenciais é um pouco mais complicada, mas Leibniz esperava que os matemáticos fossem suficientemente fluentes para derivá-la. O produto $p = xv$ pode ser pensado como a área do seguinte retângulo

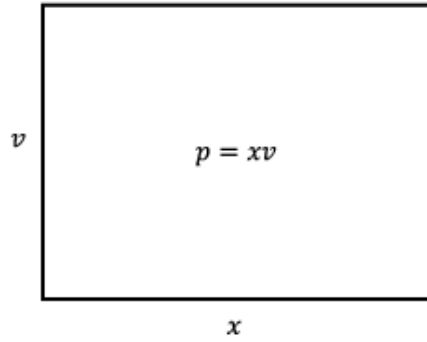


Figure 4.2

Com isso em mente, $dp = d(xv)$ pode ser pensado como a mudança na área quando x é alterado por dx e v é alterado por dv . Isso pode ser visto como a região em forma de L no desenho a seguir.

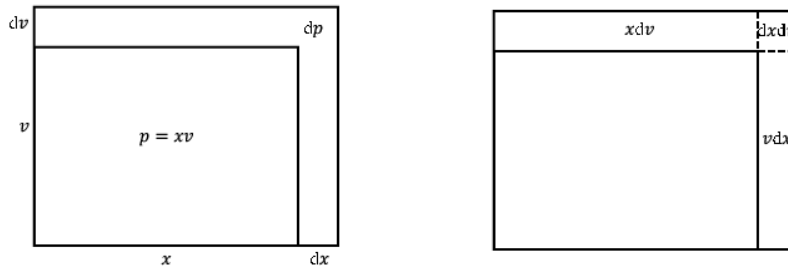


Figure 4.3

Dividindo a região em forma de L em 3 retângulos, obtemos

$$d(xv) = x dv + v dx + dx dv. \quad (\text{I.1})$$

Embora dx e dv sejam infinitamente pequenos, Leibniz raciocinou que $dx dv$ é *ainda mais* infinitamente pequeno (quadraticamente infinitamente pequeno?) comparado a $x dv$ e $v dx$ e pode, portanto, ser ignorado deixando

$$d(xv) = x dv + v dx.$$

Você deve sentir algum desconforto com a ideia de simplesmente descartar o produto $dx dv$ porque ele é “comparativamente pequeno”. Isso significa que você foi bem treinado e tem internalizado completamente o ditado de [10]: “Os menores erros não podem, em questões matemáticas, ser desprezados.” É logicamente insustentável deixar de lado uma expressão só porque ela é pequena. Muito menos deveríamos estar dispostos a ignorar uma expressão alegando que ela é “infinitamente menor” do que outra quantidade que é ela própria “infinitamente pequena”.

Newton e Leibniz sabiam disso tão bem quanto nós. Mas eles também sabiam que seus métodos *funcionavam*. Eles deram respostas comprovadamente corretas a problemas que até então eram completamente intratáveis. É a marca do seu gênio o facto de ambos os homens terem perseverado, apesar das dificuldades muito evidentes que os seus métodos implicavam.

4.1.3 Abordagem de Newton para a regra do produto

No livro Principia, Newton “provou” a Regra do Produto da seguinte forma: Sejam x e v “quantidades fluidas” e considere o retângulo, R , cujos lados são

x e v . R também é uma quantidade fluida e desejamos encontrar seu fluxo (derivada) a qualquer momento.

O “Método das Fluxões” de Newton. A abordagem de Newton ao cálculo — seu ‘Método das Fluxões’ — dependia fundamentalmente do movimento. Ou seja, ele via suas variáveis (fluentes) como mudando (fluindo ou fluindo) no tempo. A taxa de mudança de um fluente ele chamou de fluxão. Como base, as abordagens de Leibniz e Newton caíram em desuso, embora ambas ainda sejam universalmente usadas como uma abordagem conceitual, uma “forma de pensar”, sobre as ideias do cálculo.

Primeiro incremento x e v por $\frac{\Delta x}{2}$ e $\frac{\Delta v}{2}$ respectivamente. Então o incremento correspondente de R é

$$\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \left(v + \frac{\Delta v}{2}\right) = xv + x\frac{\Delta v}{2} + v\frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x \Delta v}{4}. \quad (\text{I.2})$$

Agora diminua x e v nas mesmas quantidades:

$$\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) \left(v - \frac{\Delta v}{2}\right) = xv - x\frac{\Delta v}{2} - v\frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x \Delta v}{4}. \quad (\text{I.3})$$

Subtraindo o lado direito de [equação \(I.3\)](#) do lado direito de [equação \(I.2\)](#) dá

$$\Delta R = x\Delta v + v\Delta x$$

que é a mudança total de $R = xv$ nos intervalos Δx e Δv e também reconhecidamente a Regra do Produto.



Figure 4.4 [Isaac Newton](#)⁶

Este argumento não é melhor que o de Leibniz, pois depende fortemente do número $1/2$ para funcionar. Se tomarmos quaisquer outros incrementos em x e v cujos comprimentos totais sejam Δx e Δv simplesmente não funcionará. Experimente e veja.

Em defesa de Newton, ele não estava realmente tentando justificar seus métodos matemáticos nos Principia. Sua atenção estava voltada para a física, não para a matemática, então ele estava apenas tentando dar uma demonstração convincente de seus métodos. Você pode decidir por si mesmo quão convincente é a demonstração dele.

Observe que não há menção a limites de quocientes de diferença ou derivadas. Na verdade, o termo derivado só foi cunhado em 1797, por Lagrange. Num certo sentido, estes tópicos não eram necessários na altura, uma vez que Leibniz e

⁶mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Newton/

Newton assumiram que as curvas com as quais lidavam tinham linhas tangentes e, de facto, Leibniz utilizou explicitamente a linha tangente para relacionar duas quantidades diferenciais. Isto era consistente com o pensamento da época e durante este capítulo também assumiremos que todas as quantidades são diferenciáveis. Como veremos mais tarde, esta suposição leva a dificuldades.

Tanto Newton como Leibniz ficaram satisfeitos com o facto de o seu cálculo fornecer respostas que concordavam com o que era conhecido na altura. Por exemplo $d(x^2) = d(xx) = x dx + x dx = 2x dx$ e $d(x^3) = d(x^2x) = x^2 dx + x d(x^2) = x^2 dx + x(2x dx) = 3x^2 dx$, resultados que foram essencialmente derivados por outros de maneiras diferentes.

Problema 4.5

- (a) Use a regra do produto de Leibniz $d(xv) = x dv + v dx$ para mostrar que se n é um número inteiro positivo então $d(x^n) = nx^{n-1} dx$
- (b) Use a regra do produto de Leibniz para derivar a regra do quociente

$$d\left(\frac{v}{y}\right) = \frac{y dv - v dy}{yy}.$$

- (c) Use a regra do quociente para mostrar que se n é um número inteiro positivo, então

$$d(x^{-n}) = -nx^{-n-1} dx.$$

□

Problema 4.6 Sejam p e q inteiros com $q \neq 0$. Mostre que $d\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1} dx$ □

Leibniz também forneceu aplicações de seu cálculo para provar seu valor. Como exemplo, ele derivou a Lei da Refração de Snell a partir de suas regras de cálculo como segue.

Dado que a luz viaja pelo ar a uma velocidade de v_a e viaja pela água a uma velocidade de v_w , o problema é encontrar o caminho mais rápido do ponto A ao ponto B .

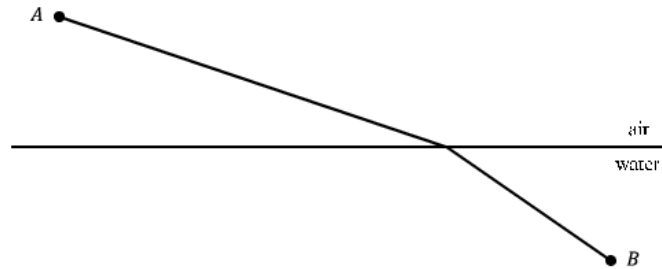


Figure 4.7

De acordo com o Princípio do Menor Tempo de Fermat, esse caminho mais rápido é aquele que a luz percorrerá.

Usando o fato de que $\text{Tempo} = \text{Distância} / \text{Velocidade}$ e a rotulagem na imagem abaixo podemos obter uma fórmula para o tempo T que a luz leva para viajar de A a B .

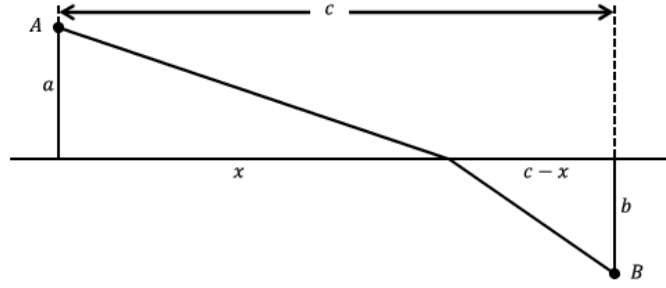


Figure 4.8

$$T = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_a} + \frac{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}{v_w}$$

Usando as regras do cálculo de Leibniz, obtemos

$$\begin{aligned} dT &= \left(\frac{1}{v_a} \frac{1}{2} (x^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} (2x) + \frac{1}{v_w} \frac{1}{2} ((c-x)^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}} (2(c-x)(-1)) \right) dx \\ &= \left(\frac{1}{v_a} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{1}{v_w} \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}} \right) dx. \end{aligned}$$

Usando o fato de que no valor mínimo para T , $dT = 0$, temos que o caminho mais rápido de A para B deve satisfazer $\frac{1}{v_a} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{v_w} \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}$. Inserindo os seguintes ângulos

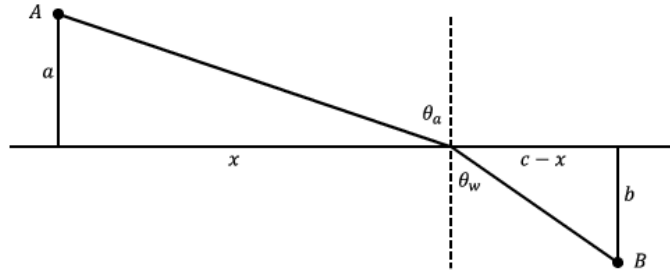
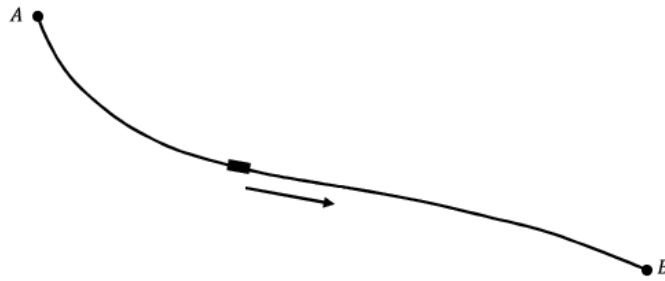


Figure 4.9

Concluimos que o caminho que a luz percorre deve satisfazer $\frac{\sin \theta_a}{v_a} = \frac{\sin \theta_w}{v_w}$ que é a Lei de Snell.

Para comparar as técnicas do século XVIII e as modernas, consideraremos a solução de Johann Bernoulli para o problema da Braquistócrona. Em 1696, Bernoulli apresentou e resolveu o problema da Braquistócrona; isto é, encontrar a forma de um fio sem atrito que une os pontos A e B de modo que o tempo que leva para uma conta deslizar para baixo sob a força da gravidade seja o menor possível.

**Figure 4.10**

Bernoulli colocou este problema do “caminho de descida mais rápida” para desafiar os matemáticos da Europa e usou a sua solução para demonstrar o poder do cálculo de Leibniz, bem como a sua própria engenhosidade.

Eu, Johann Bernoulli, dirijo-me aos matemáticos mais brilhantes do mundo. Nada é mais atraente para pessoas inteligentes do que um problema honesto e desafiador, cuja possível solução conferirá fama e permanecerá como um monumento duradouro. Seguindo o exemplo dado por Pascal, Fermat, etc., espero ganhar a gratidão de toda a comunidade científica, colocando diante dos melhores matemáticos do nosso tempo um problema que irá testar os seus métodos e a força do seu intelecto. Se alguém me comunicar a solução do problema proposto, declará-lo-ei publicamente digno de elogio. [11]

**Figure 4.11** [Johann Bernoulli](#)⁷

Além de Johann, soluções foram obtidas de Newton, Leibniz, do irmão de Johann, Jacob Bernoulli, e do Marquês de l'Hôpital [15]. Na época, havia uma controvérsia contínua e muito mordaz sobre se Newton ou Leibniz haviam sido os primeiros a inventar o cálculo. Defensor dos métodos de Leibniz, Bernoulli não acreditava que Newton seria capaz de resolver o problema usando seus métodos. Bernoulli tentou envergonhar Newton enviando-lhe o problema. No entanto, Newton resolveu.

Neste ponto de sua vida, Newton havia praticamente abandonado a ciência e a matemática e estava totalmente concentrado em suas funções administrativas como Mestre da Casa da Moeda. Em parte devido à falsificação desenfreada, o dinheiro da Inglaterra tornou-se gravemente desvalorizado e a nação estava à beira do colapso económico. A solução foi recolher todas as moedas existentes, derretê-las e cunhar novas. Como Mestre da Casa da Moeda, esse trabalho

⁷mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Johann/

coube a Newton [8]. Como você pode imaginar, esta foi uma tarefa bastante hercúlea. Mesmo assim, segundo sua sobrinha:

Quando o problema em 1696 foi enviado por Bernoulli–Sir I.N. estava no meio da pressa da grande recunagem e só voltou para casa às quatro da Torre, muito cansado, mas não dormiu até ter resolvido o problema, o que foi por volta das quatro da manhã.

Mais tarde, ele teria reclamado: “Eu não amo. . . ser . . . ensinado por estrangeiros sobre coisas matemáticas” [2].

Newton apresentou sua solução anonimamente, provavelmente para evitar mais polêmica. No entanto, os métodos usados eram tão distintamente de Newton que se diz que Bernoulli exclamou “*Tanquam ex ungue leonem*.”

Tanquam ex ungue leonem. “Eu conheço o leão pela sua garra.”

A solução engenhosa de Bernoulli começa, curiosamente, com a Lei da Refração de Snell. Ele começa considerando o meio estratificado na figura a seguir, onde um objeto viaja com velocidades $v_1, v_2, v_3, \dots$ nas várias camadas.

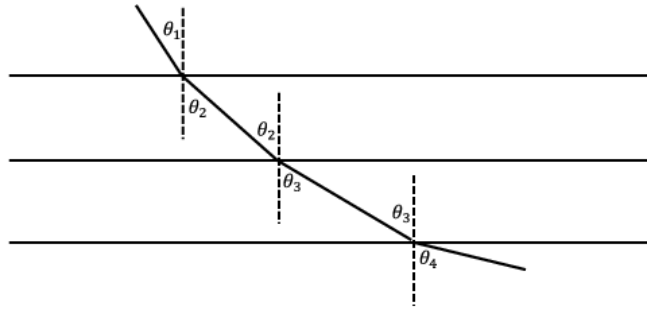


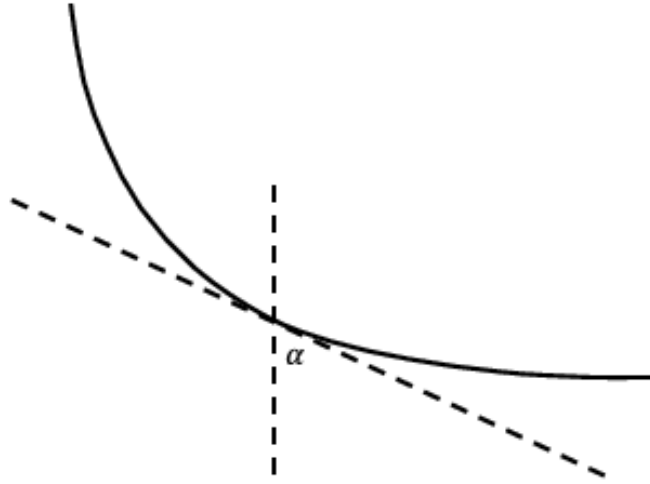
Figure 4.12

Ao aplicar repetidamente a Lei de Snell ele concluiu que o caminho mais rápido deve satisfazer

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2} = \frac{\sin \theta_3}{v_3} = \dots$$

Em outras palavras, a razão entre o seno do ângulo que a curva faz com a vertical e a velocidade permanece constante ao longo deste caminho mais rápido.

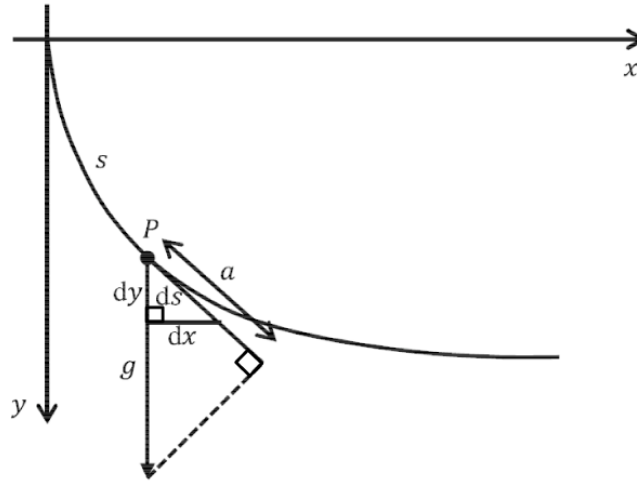
Se pensarmos em um meio em constante mudança estratificado em camadas infinitesimais e estendermos a lei de Snell a um objeto cuja velocidade muda constantemente,

**Figure 4.13**

então, ao longo do caminho mais rápido, a razão entre o seno do ângulo que a tangente da curva faz com a vertical, α , e a velocidade, v , deve permanecer constante.

$$\frac{\sin \alpha}{v} = c.$$

Se incluirmos os eixos e deixarmos P denotar a posição do cordão em um determinado momento, teremos a seguinte imagem.

**Figure 4.14**

Na figura acima, s denota o comprimento que o cordão percorreu até o ponto P (ou seja, o comprimento do arco da curva da origem até aquele ponto) e a denota a componente tangencial da aceleração da gravidade g . Como a conta viaja apenas sob a influência da gravidade, então $\frac{dv}{dt} = a$.

Para ter uma ideia de como os problemas físicos foram abordados usando o cálculo de Leibniz, usaremos a equação acima para mostrar que $v = \sqrt{2gy}$.

Por triângulos semelhantes temos $\frac{a}{g} = \frac{dy}{ds}$. Como aluno de Leibniz, Bernoulli teria considerado $\frac{dy}{ds}$ como uma fração, então

$$a ds = g dy$$

e como a aceleração é a taxa de variação da velocidade, temos

$$\frac{dv}{dt} ds = g dy.$$

Mais uma vez, os matemáticos europeus do século XVIII consideraram dv , dt , e ds como números infinitamente pequenos que, no entanto, obedecem a todas as regras usuais da álgebra. Assim, podemos reorganizar o acima para obter

$$\frac{ds}{dt} dv = g dy.$$

Desde $\frac{ds}{dt}$ é a taxa de mudança de posição em relação ao tempo; é, de fato, a velocidade do cordão. Aquilo é

$$v dv = g dy.$$

Bernoulli teria interpretado isso como uma afirmação de que dois retângulos de altura v e g , com respectivas larguras dv e dy têm área igual. Somando (integrando) todos esses retângulos, obtemos:

$$\int v dv = \int g dy$$

$$\frac{v^2}{2} = gy$$

ou

$$v = \sqrt{2gy}. \quad (\text{I.4})$$

Você está sem dúvida desconfortável com a manipulação descuidada de quantidades infinitesimais que acabou de testemunhar, então faremos uma pausa por um momento agora para comparar um desenvolvimento moderno de [equation \(I.4\)](#) para Bernoulli. Como antes, começamos com a equação:

$$\frac{a}{g} = \frac{dy}{ds}$$

$$a = g \frac{dy}{ds}.$$

Além disso, como a aceleração é a derivada da velocidade, isso é o mesmo que:

$$\frac{dv}{dt} = g \frac{dy}{ds}.$$

Agora observe que pela Regra da Cadeia $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt}$. A interpretação física desta fórmula é que a velocidade dependerá de s , quão longe o cordão se moveu no fio, mas que a distância percorrida dependerá de quanto tempo decorreu. Portanto

$$\frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = g \frac{dy}{ds}$$

ou

$$\frac{ds}{dt} \frac{dv}{ds} = g \frac{dy}{ds}$$

e desde então $\frac{ds}{dt} = v$ nós temos

$$v \frac{dv}{ds} = g \frac{dy}{ds}$$

Integrando ambos os lados em relação a s dá:

$$\begin{aligned}\int v \frac{dv}{ds} ds &= g \int \frac{dy}{ds} ds \\ \int v dv &= g \int dy\end{aligned}$$

e integrar dá

$$\frac{v^2}{2} = gy$$

como antes.

Com efeito, na formulação moderna trocamos a simplicidade e a elegância das diferenciais por uma utilização repetida e comparativamente incômoda da Regra da Cadeia. Sem dúvida você notou ao estudar Cálculo que na notação diferencial de Leibniz, a Regra da Cadeia parece “cancelar” uma expressão no topo e na base de uma fração: $\frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}$. Isso ocorre porque para os matemáticos do século 18, isso era exatamente o que era.

Dito de outra forma, os matemáticos do século XVIII não teriam reconhecido a necessidade do que chamamos de Regra da Cadeia porque esta operação era uma trivialidade para eles. Basta reduzir a fração. Isto levanta a questão: por que abandonamos uma interpretação tão clara e simples dos nossos símbolos em favor da interpretação moderna, comparativamente mais complicada? Esta é uma das perguntas que tentaremos responder neste curso.

Voltando ao problema da Braquistócrona observamos que

$$\frac{\sin \alpha}{v} = c$$

e desde então $\sin \alpha = \frac{dx}{ds}$ nós vemos isso

$$\begin{aligned}\frac{\frac{dx}{ds}}{\sqrt{2gy}} &= c \\ \frac{dx}{\sqrt{2gy(ds)^2}} &= c \\ \frac{dx}{\sqrt{2gy[(dx)^2 + (dy)^2]}} &= c.\end{aligned}\tag{I.5}$$

Bernoulli foi então capaz de resolver esta equação diferencial.

Problema 4.15 Mostre que as equações $x = \frac{\phi - \sin \phi}{4gc^2}$, $y = \frac{1 - \cos \phi}{4gc^2}$ satisfazer a equação (I.5). Bernoulli reconheceu esta solução como uma cicloide invertida, a curva traçada por um ponto fixo num círculo à medida que o círculo rola ao longo de uma superfície horizontal. $\square$

Isto ilustra o estado do cálculo no final dos anos 1600 e início dos anos 1700; os fundamentos do assunto eram um pouco instáveis, mas não havia como negar seu poder.

4.2 Séries de Potências como Polinômios Infinitos

Aplicadas a polinômios, as regras do cálculo diferencial e integral são diretas. Na verdade, diferenciar e integrar polinômios representa algumas das tarefas mais fáceis em um curso de cálculo. Por exemplo, computação $\int (7 - x + x^2) dx$ é relativamente fácil comparado à computação $\int \sqrt[3]{1 + x^3} dx$. Infelizmente, nem

todas as funções podem ser expressas como polinômios. Por exemplo, $f(x) = \sin x$ não pode ser, pois um polinômio tem apenas um número finito de raízes e a função seno tem um número infinito de raízes, a saber $\{n\pi | n \in \mathbb{Z}\}$. Uma técnica padrão no século XVIII era escrever tais funções como um “polinômio infinito”, o que normalmente chamamos de série de potências. Infelizmente, um “polinômio infinito” é um objeto muito mais sutil do que um mero polinômio, que por definição é finito. Por enquanto não nos preocuparemos com essas sutilezas. Seguiremos o exemplo de nossos antepassados e manipularemos todos os objetos “semelhantes a polinômios” (finitos ou infinitos) como se fossem polinômios.

Definição 4.16 A **série de potências centrada em a** é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots.$$

Freqüentemente, nos concentraremos no comportamento de séries de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, centradas em torno de 0, já que as séries centradas em torno de outros valores de a são obtido pelo deslocamento de uma série centrada em 0. $\diamond$

Antes de continuarmos, faremos o seguinte comentário notacional. A maneira mais vantajosa de representar uma série é usar a notação de soma, pois não pode haver dúvidas sobre o padrão dos termos. Afinal, esta notação contém uma fórmula para o termo geral. Dito isto, há casos em que escrever esta fórmula não é prático. Nestes casos, é aceitável escrever a soma fornecendo os primeiros termos e usando reticências (os três pontos). Se isso for feito, deverão ser incluídos termos suficientes para tornar o padrão claro para o leitor.

Voltando à nossa definição de série de potências, considere, por exemplo, a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$. Se multiplicarmos esta série por $(1-x)$, obtemos

$$(1-x)(1+x+x^2+\cdots) = (1+x+x^2+\cdots) - (x+x^2+x^3+\cdots) = 1.$$

Isso nos leva à representação da série de potências

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Se substituirmos $x = \frac{1}{10}$ no acima, obtemos

$$1 + \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}.$$

Isto concorda com o fato de que $.333\ldots = \frac{1}{3}$, e assim $1.111\ldots = \frac{1}{9}$, e $1.111\ldots = \frac{10}{9}$.

No entanto, existem limitações para essas manipulações formais. Substituir $x = 1$ ou $x = 2$ produz resultados questionáveis

$$\frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + \cdots \quad \text{e} \quad \frac{1}{-1} = 1 + 2 + 2^2 + \cdots.$$

Estamos perdendo algo importante aqui, embora possa não estar claro exatamente o quê. Uma representação em série de uma função funciona *às vezes* mas há alguns problemas. Por enquanto, continuaremos a seguir o exemplo dos nossos antecessores do século XVIII e a ignorá-los. Ou seja, no restante desta seção focaremos nas manipulações formais para obter e usar representações

de séries de potências de várias funções. Tenha em mente que tudo isso é altamente suspeito até que possamos resolver problemas como os que acabamos de apresentar.

As séries de potências tornaram-se uma importante ferramenta de análise no século XVIII. Ao representar várias funções como séries de potências, elas poderiam ser tratadas como se fossem polinômios (infinitos). A seguir está um exemplo.

Exemplo 4.17 Resolva o seguinte problema de valor inicial: Encontre $y(x)$ dado que $\frac{dy}{dx} = y$, $y(0) = 1$.

Alguns segundos de reflexão devem convencê-lo de que a solução deste problema é $y(x) = e^x$. Ignoraremos isso por enquanto em favor de enfatizar a técnica.

Supondo que a solução possa ser expressa como uma série de potências, temos

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Diferenciar nos dá

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots$$

Desde $\frac{dy}{dx} = y$ vemos isso

$$a_1 = a_0, 2a_2 = a_1, 3a_3 = a_2, \dots, na_n = a_{n-1}, \dots$$

Isso leva ao relacionamento

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} = \frac{1}{n(n-1)} a_{n-2} = \dots = \frac{1}{n!} a_0.$$

Assim, a solução em série da equação diferencial é

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0}{n!} x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Usando a condição inicial $y(0) = 1$, obtemos $1 = a_0(1 + 0 + \frac{1}{2!}0^2 + \dots) = a_0$. Assim, a solução para o problema inicial é $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$. Vamos chamar essa função de $E(x)$. Então, por definição

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

□

Vamos examinar algumas propriedades desta função. A primeira propriedade fica clara na definição.

Propriedade 1. $E(0) = 1$

Propriedade 2. $E(x+y) = E(x)E(y)$.

Para ver isso multiplicamos as duas séries, então temos

$$\begin{aligned} E(x)E(y) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^n \right) \\ &= \left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) \left(\frac{y^0}{0!} + \frac{y^1}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^0 y^0}{0! 0!} + \frac{x^0 y^1}{0! 1!} + \frac{x^1 y^0}{1! 0!} + \frac{x^0 y^2}{0! 2!} + \frac{x^1 y^1}{1! 1!} + \frac{x^2 y^0}{2! 0!} \\
&\quad + \frac{x^0 y^3}{0! 3!} + \frac{x^1 y^2}{1! 2!} + \frac{x^2 y^1}{2! 1!} + \frac{x^3 y^0}{3! 0!} + \dots \\
&= \frac{x^0 y^0}{0! 0!} + \left(\frac{x^0 y^1}{0! 1!} + \frac{x^1 y^0}{1! 0!} \right) \\
&\quad + \left(\frac{x^0 y^2}{0! 2!} + \frac{x^1 y^1}{1! 1!} + \frac{x^2 y^0}{2! 0!} \right) \\
&\quad + \left(\frac{x^0 y^3}{0! 3!} + \frac{x^1 y^2}{1! 2!} + \frac{x^2 y^1}{2! 1!} + \frac{x^3 y^0}{3! 0!} \right) + \dots \\
&= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} \left(\frac{1!}{0!1!} x^0 y^1 + \frac{1!}{1!0!} x^1 y^0 \right) \\
&\quad + \frac{1}{2!} \left(\frac{2!}{0!2!} x^0 y^2 + \frac{2!}{1!1!} x^1 y^1 + \frac{2!}{2!0!} x^2 y^0 \right) \\
&\quad + \frac{1}{3!} \left(\frac{3!}{0!3!} x^0 y^3 + \frac{3!}{1!2!} x^1 y^2 + \frac{3!}{2!1!} x^2 y^1 + \frac{3!}{3!0!} x^3 y^0 \right) + \dots \\
\\
E(x)E(y) &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} \left(\binom{1}{0} x^0 y^1 + \binom{1}{1} x^1 y^0 \right) \\
&\quad + \frac{1}{2!} \left(\binom{2}{0} x^0 y^2 + \binom{2}{1} x^1 y^1 + \binom{2}{2} x^2 y^0 \right) \\
&\quad + \frac{1}{3!} \left(\binom{3}{0} x^0 y^3 + \binom{3}{1} x^1 y^2 + \binom{3}{2} x^2 y^1 + \binom{3}{3} x^3 y^0 \right) + \dots \\
&= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} (x+y)^1 + \frac{1}{2!} (x+y)^2 + \frac{1}{3!} (x+y)^3 + \dots \\
&= E(x+y). \tag{I.6}
\end{aligned}$$

Propriedade 3. Se m for um número inteiro positivo então $E(mx) = (E(x))^m$. Em particular, $E(m) = (E(1))^m$.

Problema 4.18 Comprovar Propriedade 3. □

Propriedade 4. $E(-x) = \frac{1}{E(x)} = (E(x))^{-1}$.

Problema 4.19 Provar Propriedade 4. □

Propriedade 5. Se n é um número inteiro com $n \neq 0$, então $E(\frac{1}{n}) = \sqrt[n]{E(1)} = (E(1))^{1/n}$.

Problema 4.20 Comprovar Propriedade 5. □

Propriedade 6. Se m e $n \neq 0$, então $E(\frac{m}{n}) = (E(1))^{m/n}$.

Problema 4.21 Comprovar Propriedade 6. □

Definição 4.22 Seja $E(1)$ denotado pelo número e . Usando a série $e = E(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, podemos aproximar e com qualquer grau de precisão. Em particular $e \approx 2.71828$. ◇

À luz da Propriedade 6, vemos que para qualquer número racional r , $E(r) = e^r$. Isso não apenas nos dá a representação em série $e^r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} r^n$ para qualquer número racional r , mas nos dá uma maneira de definir e^x para valores irracionais de x também. Ou seja, podemos definir

$$e^x = E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

para qualquer número real x .

A título de ilustração, agora temos $e^{\sqrt{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\sqrt{2})^n$. A expressão $e^{\sqrt{2}}$ não tem sentido se tentarmos interpretá-la como um número irracional elevado a outro. O que significa elevar qualquer coisa à potência $\sqrt{2}$? Contudo a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\sqrt{2})^n$ parece ter significado e pode ser usado para estender a função exponencial a expoentes irracionais. Na verdade, definir a função exponencial por meio desta série responde à questão que levantamos em [Chapter 3](#): O que $4^{\sqrt{2}}$ significa?

$$\text{Isso significa } 4^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \log 4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2} \log 4)^n}{n!}.$$

Este pode parecer um longo caminho apenas para definir algo tão simples como a exponenciação. Mas esta é uma atitude fundamentalmente equivocada. A exponenciação apenas *parece* simples porque sempre pensamos nela como uma multiplicação repetida (em $\mathbb{Z}$) ou como tirar raízes (em $\mathbb{Q}$). Quando expandimos a operação para os números reais, esta simplesmente não pode ser a forma como interpretamos algo como $4^{\sqrt{2}}$. Como você calcula o produto de $\sqrt{2}$ cópias de 4? O conceito não tem sentido. O que precisamos é de uma interpretação de $4^{\sqrt{2}}$ que seja consistente com, digamos, $4^{3/2} = (\sqrt{4})^3 = 8$. Isso é exatamente o que a representação em série de e^x fornece.

Também temos um meio de calcular integrais como séries. Por exemplo, a famosa curva em forma de sino dada pela função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ é de vital importância nas estatísticas e deve ser integrado para calcular probabilidades. A série de potências que desenvolvemos fornece-nos um método de integração desta função. Por exemplo, temos

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=0}^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-x^2}{2} \right)^n \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n! 2^n} \int_{x=0}^b x^{2n} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n b^{2n+1}}{n! 2^n (2n+1)} \right). \end{aligned}$$

Esta série pode ser usada para aproximar a integral com qualquer grau de precisão. A capacidade de fornecer tais cálculos tornou as séries de potências de suma importância em 1700.

Problema 4.23

- (a) Mostre que se $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ satisfaz a equação diferencial $\frac{d^2 y}{dx^2} = -y$, então

$$a_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} a_n$$

e concluir que

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{1}{2!} a_0 x^2 - \frac{1}{3!} a_1 x^3 + \frac{1}{4!} a_0 x^4 + \frac{1}{5!} a_1 x^5 - \frac{1}{6!} a_0 x^6 - \frac{1}{7!} a_1 x^7 + \dots$$

- (b) Desde $y = \sin x$ satisfaz $\frac{d^2 y}{dx^2} = -y$, vemos isso

$$\sin x = a_0 + a_1 x - \frac{1}{2!} a_0 x^2 - \frac{1}{3!} a_1 x^3 + \frac{1}{4!} a_0 x^4 + \frac{1}{5!} a_1 x^5 - \frac{1}{6!} a_0 x^6 - \frac{1}{7!} a_1 x^7 + \dots$$

para algumas constantes a_0 e a_1 . Mostre que neste caso $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$

e obtenha

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

□

Problema 4.24

(a) Use a série

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

para obter a série

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}.$$

(b) Let $s(x, N) = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ e $c(x, N) = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ e use um sistema de álgebra computacional para plotá-los para $-4\pi \leq x \leq 4\pi$, $N = 1, 2, 5, 10, 15$. Descreva o que está acontecendo com a série à medida que N aumenta.

□

Problema 4.25 Use a série geométrica, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, para obter uma série para $\frac{1}{1+x^2}$ e use isso para obter a série

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}.$$

Use a série acima para obter a série $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$.

□

A série do arco tangente era conhecida por James Gregory (1638-1675) e às vezes é chamada de “série de Gregory”. Leibniz descoberto independentemente $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ examinando o área de um círculo. Embora nos forneça um meio de aproximar π com qualquer precisão desejada, a série converge muito lentamente para ter qualquer utilidade prática. Por exemplo, se calcularmos a soma dos primeiros 1000 termos obtemos

$$4 \left(\sum_{n=0}^{1000} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \right) \approx 3.142591654$$

que aproxima apenas π de duas casas decimais.

Newton conhecia esses resultados e o esquema geral de uso de séries para calcular áreas sob curvas. Esses resultados motivaram Newton a fornecer uma aproximação em série para π também, que, esperançosamente, convergiria mais rapidamente. Usaremos terminologia moderna para simplificar as ideias de Newton. Primeiro observe que $\frac{\pi}{4} = \int_{x=0}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ já que esta integral fornece a área de um quarto de o círculo unitário. O truque agora é encontrar séries que representem $\sqrt{1-x^2}$.

Para este fim começamos com o teorema binomial

$$(a+b)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} a^{N-n} b^n,$$

onde

$$\begin{aligned}\binom{N}{n} &= \frac{N!}{n!(N-n)!} \\ &= \frac{N(N-1)(N-2)\cdots(N-n+1)}{n!} \\ &= \frac{\prod_{j=0}^{n-1} (N-j)}{n!}.\end{aligned}$$

Infelizmente, agora temos um pequeno problema com a nossa notação que será uma fonte de confusão mais tarde se não o corrigirmos. Portanto, faremos uma pausa para abordar esse assunto. Voltaremos à expansão binomial posteriormente.

Esta última expressão está se tornando estranha da mesma forma que uma expressão como

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

é estranho. Assim como esta soma é menos complicada quando escrita como $\sum_{n=0}^k \left(\frac{1}{2}\right)^n$ o *produto*

$$N(N-1)(N-2)\cdots(N-n+1)$$

é menos complicado quando o escrevemos como $\prod_{j=0}^{n-1} (N-j)$.

Um pi maiúsculo (Π) é usado para denotar um produto da mesma forma que um sigma maiúsculo (Σ) é usado para denotar uma soma. O exemplo mais familiar seria escrever

$$n! = \prod_{j=1}^n j.$$

Assim como é conveniente definir $0! = 1$, acharemos conveniente definir $\prod_{j=1}^0 = 1$. Da mesma forma, o fato de que $\binom{N}{0} = 1$ leva à convenção $\prod_{j=0}^{-1} (N-j) = 1$. Por mais estranho que pareça, é conveniente e é consistente com a convenção $\sum_{j=0}^{-1} s_j = 0$.

Voltando à expansão binomial e relembando nossa convenção

$$\prod_{j=0}^{-1} (N-j) = 1,$$

podemos escrever,

$$(1+x)^N = 1 + \sum_{n=1}^N \left(\frac{\prod_{j=0}^{n-1} (N-j)}{n!} \right) x^n = \sum_{n=0}^N \left(\frac{\prod_{j=0}^{n-1} (N-j)}{n!} \right) x^n.$$

Essas duas representações provavelmente parecem iguais à primeira vista. Reserve um momento e certifique-se de ver onde eles diferem.

Há uma vantagem em usar esta convenção (especialmente ao programar um produto em um computador), mas esta não é uma visão matemática profunda. É apenas uma conveniência de notação e não queremos que você se preocupe com isso, então usaremos ambas as formulações (pelo menos inicialmente).

Observe que podemos estender a definição acima de $\binom{N}{n}$ para valores $n > N$. Neste caso, $\prod_{j=0}^{n-1} (N-j)$ será igual a 0, pois um dos fatores no produto será 0 (aquele onde $n = N$). Isso nos dá que $\binom{N}{n} = 0$ quando $n > N$ e assim

$$(1+x)^N = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\prod_{j=0}^{n-1} (N-j)}{n!} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\prod_{j=0}^{n-1} (N-j)}{n!} \right) x^n$$

vale para qualquer número inteiro não negativo N . Essencialmente, Newton perguntou se seria possível que a equação acima pudesse conter valores de N que não fossem inteiros não negativos. Por exemplo, se a equação fosse verdadeira para $N = \frac{1}{2}$, obteríamos

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\prod_{j=0}^{n-1} (\frac{1}{2} - j)}{n!} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\prod_{j=0}^{n-1} (\frac{1}{2} - j)}{n!} \right) x^n$$

ou

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + \dots \quad (\text{I.7})$$

Observe que como $1/2$ não é um número inteiro, a série não termina mais. Embora Newton não tenha provado que esta série estava correta (nem nós), ele a testou multiplicando a série por si mesma. Quando viu que ao elevar a série ao quadrado ele começava a obter $1 + x + 0x^2 + 0x^3 + \dots$, ele se convenceu de que a série era exatamente igual a $\sqrt{1+x}$.

Problema 4.26

Considere a representação da série

$$\begin{aligned} (1+x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{n-1} (\frac{1}{2} - j)}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{n-1} (\frac{1}{2} - j)}{n!} x^n. \end{aligned}$$

Multiplique esta série por ela mesma e calcule os coeficientes para x^0, x^1, x^2, x^3, x^4 na série resultante. $\square$

Problema 4.27 Deixe

$$S(x, M) = \sum_{n=0}^M \frac{\prod_{j=0}^{n-1} (\frac{1}{2} - j)}{n!} x^n.$$

Use um sistema de álgebra computacional para representar graficamente $S(x, M)$ para $M = 5, 10, 15, 95, 100$ e compare-os com o gráfico para $\sqrt{1+x}$. O que parece estar acontecendo? Para quais valores de x a série parece convergir para $\sqrt{1+x}$? $\square$

Convencido de que tinha a série correta, Newton a usou para encontrar uma representação em série de $\int_{x=0}^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Problema 4.28 Use a série $(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{n-1} (\frac{1}{2} - j)}{n!} x^n$ para obter a série

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \int_{x=0}^1 \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\prod_{j=0}^{n-1} (\frac{1}{2} - j)}{n!} \right) \left(\frac{(-1)^n}{2n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \dots \end{aligned}$$

Use um sistema de álgebra computacional para somar os primeiros 100 termos desta série e compare a resposta com $\frac{\pi}{4}$. $\square$

Novamente, Newton tinha uma série que poderia ser verificada (de certa forma) computacionalmente. Isso o convenceu ainda mais de que ele tinha a série correta.

Problema 4.29

(a) Mostre isso

$$\int_{x=0}^{1/2} \sqrt{x-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \prod_{j=0}^{n-1} (\frac{1}{2} - j)}{\sqrt{2} n! (2n+3) 2^n}$$

e use isso para mostrar que

$$\pi = 16 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \prod_{j=0}^{n-1} (\frac{1}{2} - j)}{\sqrt{2} n! (2n+3) 2^n} \right).$$

(b) Agora temos duas séries para calcular π : aquela da parte (a) e aquela derivada anteriormente, a saber

$$\pi = 4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \right).$$

Exploraremos qual deles converge para π mais rápido. Tendo isso em mente, defina $S1(N) = 16 \left(\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n \prod_{j=0}^{n-1} (\frac{1}{2} - j)}{\sqrt{2} n! (2n+3) 2^n} \right)$ e $S2(N) = 4 \left(\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+1} \right)$.

Use a sistema de álgebra computacional para calcular $S1(N)$ e $S2(N)$ para $N = 5, 10, 15, 20$. Qual deles parece convergir para π mais rápido?

□

Em geral a representação da série

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\prod_{j=0}^{n-1} (\alpha - j)}{n!} \right) x^n \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots \end{aligned}$$

é chamada de **série binomial** (ou série binomial de Newton). Esta série está correta quando α é um número inteiro não negativo (afinal, foi assim que obtivemos a série). Também podemos ver que está correto quando $\alpha = -1$ conforme obtemos

$$\begin{aligned} (1+x)^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\prod_{j=0}^{n-1} (-1-j)}{n!} \right) x^n \\ &= 1 + (-1)x + \frac{-1(-1-1)}{2!} x^2 + \frac{-1(-1-1)(-1-2)}{3!} x^3 + \dots \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \end{aligned}$$

que pode ser obtido a partir da série geométrica $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$.

Na verdade, a série binomial é a representação de série correta para todos os valores do expoente α (embora ainda não tenhamos provado isso).

Problema 4.30 Seja k um número inteiro positivo. Encontre a série de potências, centrada em zero, para $f(x) = (1-x)^{-k}$ por

(a) Diferenciando a séries geométricas $(k-1)$ vezes.

- (b) Aplicando a série binomial.
- (c) Compare esses dois resultados.

□



Figure 4.31 Leonhard Euler⁸

Leonhard Euler era um mestre na exploração de séries de potências. Em 1735, Euler, de 28 anos, foi aclamado pelo que hoje é chamado de problema de Basileia: encontrar uma forma fechada para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Outros matemáticos sabiam que a série convergia, mas Euler foi o primeiro a encontrar o seu valor exato. O problema a seguir fornece essencialmente a solução de Euler.

Problema 4.32 O problema de Basileia.

- (a) Mostre que a série de potências para $\frac{\sin x}{x}$ é dado por $1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \dots$
- (b) Use (a) para inferir que as raízes de $1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \dots$ são dados por

$$x = \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$$

- (c) Suponha $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ié um polinômio com raízes $r_1, r_2, \dots, r_n$. Mostre que se $a_0 \neq 0$, então todas as raízes são diferentes de zero e

$$p(x) = a_0 \left(1 - \frac{x}{r_1}\right) \left(1 - \frac{x}{r_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{r_n}\right).$$

- (d) Supondo que o resultado da parte (c) seja válido para um polinômio infinito (série de potências), deduza que

$$1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \dots = \left(1 - \left(\frac{x}{\pi}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{x}{3\pi}\right)^2\right) \dots$$

- (e) Expanda este produto para deduzir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

Problema 4.33 Fórmula de Euler.

- (a) Use a expansão em série de potências de e^x , $\sin x$, e $\cos x$ para derivar

¹⁰mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler/

Fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta.$$

- (b) Use a fórmula de Euler para derivar as fórmulas de adição subtração da trigonometria:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \sin\beta \cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

- (c) Use a fórmula de Euler para mostrar que

$$\sin 2\theta = 2 \cos\theta \sin\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

- (d) Use a fórmula de Euler para mostrar que

$$\sin 3\theta = 3 \cos^2\theta \sin\theta - \sin^3\theta$$

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - \cos\theta \sin^2\theta$$

- (e) Encontre uma fórmulasin(nθ) e cos(nθ)para qualquer número inteiro positivo n.

□

4.3 Problemas Adicionais

Problema 4.34 Use a série geométrica para obter a série

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}. \end{aligned}$$

□

Problema 4.35 Sem usar o Teorema de Taylor, represente as seguintes funções como séries de potências expandidas em torno de 0 (ou seja, na forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$).

(a) $\ln(1-x^2)$

(b) $\frac{x}{1+x^2}$

(c) $\arctan(x^3)$

(d) $\ln(2+x)$

Dica. $2+x = 2\left(1+\frac{x}{2}\right)$

□

Problema 4.36 Seja a um número real positivo. Encontre uma série de potências para a^x expandida em cerca de 0,

Dica. $a^x = e^{\ln(a^x)}$

□

Problema 4.37 Represente a função seno x como uma série de potências expandida sobre a (ou seja, , na forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$).

Dica. $\sin x = \sin(a + x - a)$. □

Problema 4.38 Sem usar o Teorema de Taylor, represente as seguintes funções como uma série de potências expandida em torno de a para o valor dado de a (ou seja, na forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$).

(a) $\ln x$, $a = 1$

(b) e^x , $a = 3$

(c) $x^3 + 2x^2 + 3$, $a = 1$

(d) $\frac{1}{x}$, $a = 5$

□

Problema 4.39 Avalie as seguintes integrais como séries.

(a) $\int_{x=0}^1 e^{x^2} dx$

(b) $\int_{x=0}^1 \frac{1}{1+x^4} dx$

(c) $\int_{x=0}^1 \sqrt[3]{1-x^3} dx$

□

Capítulo 5

Questões Relacionadas a Séries de Potências

5.1 Fórmula de Taylor

Como vimos no capítulo anterior, representar funções como séries de potências foi uma estratégia frutífera para os matemáticos do século XVIII (como ainda é). Diferenciar e integrar séries de potências termo a termo era relativamente fácil, *parecia* funcionar e levou a muitas aplicações. Além disso, representações em séries de potências para todas as funções elementares poderiam ser obtidas se alguém fosse suficientemente engenhoso.

No entanto, a astúcia é uma ferramenta pouco confiável. Existe alguma maneira sistemática de encontrar uma série de potências para uma função dada? Na verdade, havia questões incômodas: se podemos encontrar uma série de potências, como sabemos que a série que criamos representa a função com a qual começamos? Ainda pior, é possível que uma função tenha mais de uma representação em série de potências centrada em um dado valor a ? Esta questão de unicidade é abordada pelo seguinte teorema.

Teorema 5.1 *Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, então $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, onde $f^{(n)}(a)$ representa a n^{th} derivada de f avaliada em a .*

são necessários. Note que não começamos com uma função e derivamos sua representação em série.

Alguns comentários sobre [Theorem 5.1](#) são necessários. Note que não começamos com uma função e derivamos sua representação em série. Em vez disso, *definimos* $f(x)$ como a série que escrevemos. Isso assume que a expressão $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ realmente tem significado (que converge). Neste ponto, temos todos os motivos para esperar que sim, no entanto, expectativa não é prova, então notamos que isso é uma suposição, não uma verdade estabelecida. Da mesma forma, a ideia de que podemos diferenciar um polinômio infinito termo a termo como faríamos com um polinômio finito também é assumida. Como antes, seguimos os passos de nossos antecessores do século XVIII ao fazer essas suposições. Por enquanto.

Problema 5.2

Prova [Theorem 5.1](#).

Dica. $f(a) = a_0 + a_1(a-a) + a_2(a-a)^2 + \cdots = a_0$. Diferencie para obter os outros termos. $\square$

De acordo com o [Theorem 5.1](#) vemos que se começarmos com a função $f(x)$,

então não importa como obtemos sua série de potências, o resultado sempre será o mesmo. A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} (x-a)^3 + \dots$$



Figure 5.3 Brook Taylor⁹

é chamado de *série de Taylor* para f expandida em torno de (centrada em) a . é chamado de série de Taylor para f expandida em torno de (centrada em) a . Embora esta "máquina" sistemática para obter séries de potências para uma função pareça ter sido conhecida por vários matemáticos no início do século XVIII, Brook Taylor foi o primeiro a publicar esse resultado em seu *Methodus Incrementorum* (1715). O caso especial quando $a = 0$ foi incluído por Colin Maclaurin em seu *Treatise of Fluxions* (1742). Assim, quando $a = 0$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ é frequentemente chamada de *série de Maclaurin* para f .

A "notação prima" para a derivada não foi usada por Taylor, Maclaurin or their contemporaries. Maclaurin ou seus contemporâneos. Ela foi introduzida por Joseph Louis Lagrange em sua obra de 1779 *Théorie des Fonctions Analytiques*. Nesse trabalho, Lagrange procurou se livrar dos infinitesimais e basear o cálculo na ideia de série de potências. Sua ideia era que, ao representar cada função como uma série de potências, o cálculo poderia ser feito "algebricamente", manipulando séries de potências e examinando vários aspectos da representação da série em vez de recorrer à noção "controversa" de infinitesimais. Ele assumiu implicitamente que toda função contínua poderia ser substituída por sua representação em série de potências.

Ou seja, ele queria pensar na série de Taylor como um "grande polinômio", porque polinômios são fáceis de trabalhar. Foi uma ideia muito simples, mas extremamente engenhosa e de longo alcance. Desde $e^x = 1 + x + x^2/2 + \dots$, por exemplo, por que não simplesmente definir a exponencial como a série e trabalhar com ela. Afinal, a série é apenas um polinômio muito longo.

Essa ideia não surgiu do nada. Leonhard Euler plicou exatamente esse conceito para resolver muitos problemas ao longo do século XVIII. Algumas de suas soluções ainda são bastante impressionantes quando você as vê pela primeira vez [14].

Seguindo seu exemplo da série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

¹¹mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Taylor/



Figure 5.4 Joseph-Louis Lagrange¹⁰

Lagrange observou que o coeficiente de $(x - a)^n$ fornece a derivada de f em a (Dividido por $n!$). Modificando a fórmula acima para atender ao seu propósito, Lagrange supôs que toda função diferenciável poderia ser representada como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(a)(x - a)^n.$$

Se considerarmos o parâmetro a como uma variável, então g_1 é a derivada de f , $g_2 = 2f''$ e, em geral,

$$g_n = n!f^{(n)}.$$

Lagrange chamou sua função g_1 de “*fonction dérivée*” a partir da qual obtemos o nome moderno de “derivada.”

No geral, essa foi uma ideia muito engenhosa e perspicaz, cuja única falha real é que sua suposição fundamental não é verdadeira. Acontece que nem toda função diferenciável pode ser representada como uma série de Taylor. Isso foi demonstrado de forma muito notável pelo famoso contraexemplo de Augustin Cauchy.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}. \quad (\text{I.1})$$

Essa função é, na verdade, infinitamente diferenciável em todos os lugares, mas sua série de Maclaurin (ou seja, uma série de Taylor com $a = 0$) não converge para f porque todas as suas derivadas na origem são iguais a zero: $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Calcular essas derivadas usando a definição que você aprendeu em cálculo não é conceitualmente difícil, mas as fórmulas envolvidas rapidamente se tornam complicadas. É necessário tomar cuidado para evitar erros.

Para começar, vamos calcular algumas derivadas quando $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= e^{x^{-2}} \\ f^{(1)}(x) &= 2x^{-3}e^{-x^{-2}} \\ f^{(2)}(x) &= (4x^{-6} - 6x^{-4})e^{-x^{-2}}. \end{aligned}$$

Como você pode ver, os cálculos já estão se tornando um pouco complicados e só calculamos a segunda derivada. Para simplificar um pouco, tomamos $y = x^{-1}$, e definimos $p_2(x) = 4x^6 - 6x^4$, de modo que

$$f^{(2)}(x) = p_2(x^{-1})e^{-x^{-2}} = p_2(y)e^{-y^2}.$$

¹⁰mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lagrange/

Problema 5.5 Contraexemplo de Cauchy, Parte 1.

- (a) Adotando a notação $y = x^{-1}$ e $f^{(n)}(x) = p_n(y)e^{-y^2}$, encontre $p_{n+1}(y)$ em termos de $p_n(y)$. [Nota: Não se esqueça de que você está diferenciando em relação x , não y .]
- (b) Use a indução em n para mostrar que $p_n(y)$ é um polinômio para todos os $n \in \mathbb{N}$.

□

Infelizmente, tudo o que fizemos até agora só nos fornece as derivadas de que precisamos quando x *não* é zero, mas nós precisamos da derivada quando x é zero. Para encontrá-las, precisamos voltar a ideias muito básicas.

Vamos supor, por um momento, que sabemos que $f^{(n)}(0) = 0$ e lembre-se que

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} \\ f^{(n+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} x^{-1} p_n(x^{-1}) e^{-x^{-2}} \\ f^{(n+1)}(0) &= \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{y p_n(y)}{e^{y^2}}. \end{aligned}$$

Nós podemos concluir com o seguinte problema.

Problema 5.6 Contraexemplo de Cauchy, Part 2.

- (a) Seja m um número inteiro não-negativo. Mostre que $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{y^m}{e^{y^2}} = 0$.

Dica. A indução e um toque da regra de L'Hôpital devem resolver o problema.

- (b) Prove que $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{q(y)}{e^{y^2}} = 0$ para qualquer polinômio q .
- (c) Seja $f(x)$ conforme definido em [equação \(I.1\)](#) e mostre que para todo inteiro não-negativo n , $f^{(n)}(0) = 0$.

□

Este exemplo mostrou que, embora tenha sido proveitoso explorar representações de funções usando séries de Taylor, basear os fundamentos do cálculo em séries de potências não era uma ideia sólida.

Embora a abordagem de Lagrange não tenha sido completamente bem-sucedida, ela representou um importante avanço em relação aos infinitesimais e rumo à abordagem moderna. Ainda utilizamos alguns aspectos dessa abordagem hoje em dia. Por exemplo, continuamos a usar a notação de prima (f') para denotar a derivada.

Invertendo a ideia de Lagrange, fica claro que, se sabemos calcular derivadas, podemos usar essa 'máquina' para obter uma série de potências quando não conseguimos encontrar a série por outros métodos (geralmente mais diretos). Por exemplo, considere a série binomial de Newton para $\alpha = \frac{1}{2}$. Inicialmente, obtivemos essa série ao estender o teorema binomial para expoentes não inteiros. A fórmula de Taylor oferece um método mais sistemático para derivar essa série:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^{\frac{1}{2}}; & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}-1}; & f'(0) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) (1+x)^{\frac{1}{2}-2} \quad f''(0) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right)$$

e em geral desde

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \cdots \left(\frac{1}{2} - (n-1) \right) (1+x)^{\frac{1}{2}-n}$$

nós temos

$$f^{(n)}(0) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \cdots \left(\frac{1}{2} - (n-1) \right).$$

Usando a fórmula de Taylor, obtemos a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \cdots \left(\frac{1}{2} - (n-1) \right)}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - j \right)}{n!} x^n$$

Que está de acordo com a [equação \(I.7\)](#) do capítulo anterior.

Problema 5.7 Use a fórmula de Taylor para obter a série binomial geral

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{n-1} (\alpha - j)}{n!} x^n.$$

□

Problema 5.8 Use a fórmula de Taylor para obter a série de Taylor para funções e^x , $\sin x$, e $\cos x$ expandido sobre a . □

Como você pode ver, a "máquina" de Taylor produzirá a série de potências para uma função (se ela tiver uma), mas é tediosa de executar. Geralmente, descobriremos que essa tediosidade pode ser um obstáculo para a compreensão. Em muitos casos, será melhor ser engenhoso se pudermos. Isso geralmente é mais curto. No entanto, é reconfortante ter a fórmula de Taylor disponível como último recurso.

A existência de uma série de Taylor é abordada (até certo ponto) pelo seguinte.

Teorema 5.9 Se $f', f'', \dots, f^{(n+1)}$ são todos contínuos no intervalo contendo a e x , então

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{1}{n!} \int_{t=a}^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt.$$

Antes de abordarmos a prova, observe que o polinômio de grau n

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

se assemelha à série de Taylor e, de fato, é chamado de *polinômio de Taylor de grau n de f em torno de a* . [Teorema 5.9](#) diz que uma função pode ser escrita como a soma deste polinômio e de uma integral específica que analisaremos no próximo capítulo. Vamos iniciar a prova e deixar a prova formal por indução como um exercício.

Observe que o caso quando $n = 0$ é realmente uma reformulação do Teorema Fundamental do Cálculo. Especificamente, o TFC diz que $\int_{t=a}^x f'(t) dt = f(x) - f(a)$ o que podemos reescrever como

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{0!} \int_{t=a}^x f'(t) (x-t)^0 dt$$

para fornecer o passo base para nossa indução.

Para derivar o caso em que $n = 1$, usamos a integração por partes. Se definirmos

$$\begin{aligned} u &= f'(t) & dv &= (x-t)^0 dt \\ du &= f''(t) dt & v &= -\frac{1}{1}(x-t)^1 \end{aligned}$$

nós obtemos

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{1}{0!} \left(-\frac{1}{1} f'(t)(x-t)^1 \Big|_{t=a}^x + \frac{1}{1} \int_{t=a}^x f''(t)(x-t)^1 dt \right) \\ &= f(a) + \frac{1}{0!} \left(-\frac{1}{1} f'(x)(x-x)^1 + \frac{1}{1} f'(a)(x-a)^1 + \frac{1}{1} \int_{t=a}^x f''(t)(x-t)^1 dt \right) \\ &= f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a)^1 + \frac{1}{1!} \int_{t=a}^x f''(t)(x-t)^1 dt. \end{aligned}$$

Problema 5.10 Forneça uma prova formal por indução para [Theorem 5.9](#). $\square$

5.2 Anomalias de Séries

Até este ponto, nossa abordagem em relação às séries tem sido um tanto descuidada. Esta abordagem reflete o trabalho dos matemáticos do século XVIII, que exploraram engenhosamente o cálculo e as séries para fornecer resultados matemáticos e físicos que eram virtualmente inatingíveis antes. Os matemáticos estavam ansiosos para empurrar essas técnicas o mais longe possível para obter seus resultados e frequentemente mostraram boa intuição sobre o que era matematicamente aceitável e o que não era. No entanto, à medida que os limites eram ampliados, surgiram questões sobre a validade dos métodos

Como ilustração, considere a expansão em série

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Se substituirmos $x = 1$ nesta equação, nós obtemos

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

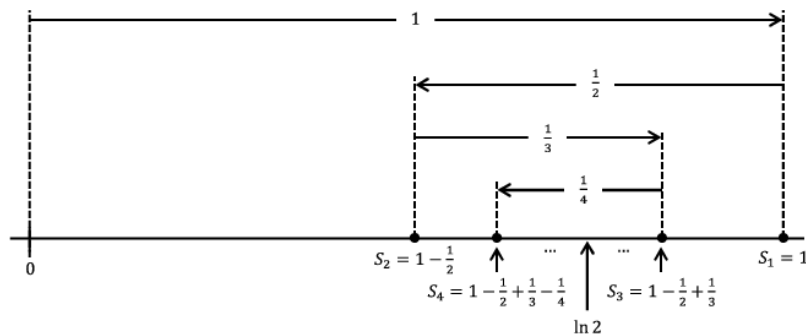
Se agrupássemos os termos da seguinte forma $(1-1) + (1-1) + \dots$, a série resultaria em 0. Um reagrupamento de $1 + (-1+1) + (-1+1) + \dots$ fornece uma resposta de 1. Essa violação da lei associativa da adição não passou despercebida pelos matemáticos do século XVIII. Em seu artigo de 1760. *Sobre séries divergentes* Euler disse:

Notável, no entanto, são as controvérsias sobre a série $1-1+1-1+etc$, cuja soma foi dada por Leibniz como $\frac{1}{2}$, embora outros discordem . . . A compreensão desta questão deve ser buscada na palavra “soma;” essa ideia, se assim concebida — ou seja, a soma de uma série é dita ser aquela quantidade à qual se aproxima à medida que mais termos da série são tomados — tem relevância apenas para as séries convergentes, e em geral devemos abandonar essa ideia de soma para séries divergentes. Por outro lado, como séries em análise surgem da expansão de frações ou quantidades irracionais ou mesmo transcendentais, será, por sua vez, permitido no cálculo substituir, em lugar de tais séries, aquela quantidade da qual ela é desenvolvida.

Mesmo com essa abordagem formal para séries, surge uma questão interessante. A série para a antiderivada de $\frac{1}{1+x}$ converge para $x = 1$ enquanto esta não converge. Especificamente, ao calcular a antiderivada da série acima, obtemos

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots$$

Se substituirmos $x = 1$ nesta série, nós obtemos $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$. Não é difícil ver que tal série alternada converge. A imagem a seguir mostra o porquê. Neste diagrama, S_n denota a soma parcial $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.



A partir do diagrama, podemos ver $S_2 \leq S_4 \leq S_6 \leq \dots \leq S_5 \leq S_3 \leq S_1$ e $S_{2k+1} - S_{2k} = \frac{1}{2k+1}$. Parece que a sequência das somas parciais vai convergir para o que está no 'meio'. Nosso diagrama indica que é $\ln 2$ no meio, mas na verdade isso não é óbvio. No entanto, é interessante que uma série converge para $x = 1$ mas a outra não.

Problema 5.11 **Problema** Use o fato de que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{2k+1}}{2k} \leq \ln 2 \leq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{2k+2}}{2k+1}$$

para determinar quantos termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ devem ser somados para aproximar $\ln 2$ com uma precisão de .0001 sem realmente calcular o valor de $\ln 2$. $\square$

Há uma situação ainda mais desconcertante provocada por esses exemplos. Uma soma infinita como $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ parece não satisfazer a lei associativa para adição. Enquanto uma série convergente como $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ satisfaz a lei associativa, mas não satisfaz a lei comutativa. Na verdade, ela não a satisfaz de maneira bastante surpreendente.

Uma generalização do seguinte resultado foi declarada e provada por Bernhard Riemann em 1854.

Teorema 5.12 *Seja a qualquer número real. Existe um rearranjo da série $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ que converge para a.*

Este teorema mostra que uma série definitivamente não é uma grande soma. Da mesma forma, uma série de potência não é um grande polinômio.

Para contextualizar, considere a *série harmônica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

Embora os termos individuais desta série converjam para 0, a série ainda diverge (para o infinito) como evidenciado pela desigualdade.

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

$$\begin{aligned}
&> \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Munidos deste fato, podemos perceber por que [Theorem 5.12](#) é verdadeiro. Primeiro note que

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \cdots = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\right) = -\infty$$

e

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots = \infty.$$

Isso diz que se adicionarmos termos suficientes de $-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \cdots$ podemos tornar essa soma tão pequena quanto quisermos, e se somarmos termos suficientes de $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots$ podemos tornar essa soma tão grande quanto quisermos. Isso nos fornece o esboço geral da prova. O truque é adicionar apenas termos positivos suficientes até que a soma seja apenas maior que a . Então começamos a adicionar termos negativos até que a soma seja um pouco menos que a . Retomando de onde paramos com os termos positivos, adicionamos apenas o suficiente de termos positivos até ficarmos ligeiramente acima de a novamente. Em seguida, adicionamos termos negativos até ficarmos abaixo de a . Em essência, estamos oscilando para cima e para baixo em torno de a . Se fizermos isso cuidadosamente, podemos fazer com que esse rearranjo convirja para a . A notação na prova abaixo fica um pouco complicada, mas mantenha essa ideia geral em mente enquanto você a lê.

Seja O_1 o primeiro inteiro ímpar tal que $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{O_1} > a$. Agora escolha E_1 para ser o primeiro número inteiro par tal que

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \cdots - \frac{1}{E_1} < a - \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{O_1}\right).$$

Assim

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{O_1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \cdots - \frac{1}{E_1} < a.$$

Observe que ainda temos $\frac{1}{O_1+2} + \frac{1}{O_1+4} + \cdots = \infty$. Com isso em mente, escolha O_2 para ser o primeiro inteiro ímpar com

$$\frac{1}{O_1+2} + \frac{1}{O_1+4} + \cdots + \frac{1}{O_2} > a - \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{O_1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \cdots - \frac{1}{E_1}\right).$$

Assim temos

$$a < 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{O_1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \cdots - \frac{1}{E_1} + \frac{1}{O_1+2} + \frac{1}{O_1+4} + \cdots + \frac{1}{O_2}.$$

Além disso, uma vez que

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{O_1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \cdots - \frac{1}{E_1} + \frac{1}{O_1+2} + \frac{1}{O_1+4} + \cdots + \frac{1}{O_2-2} < a$$

temos

$$\left| 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{O_1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \cdots \right|$$

$$\left| -\frac{1}{E_1} + \frac{1}{O_1+2} + \frac{1}{O_1+4} + \cdots + \frac{1}{O_2} - a \right| < \frac{1}{O_2}.$$

De forma semelhante, escolha E_2 como o primeiro inteiro par tal que

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{O_1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \cdots \\ - \frac{1}{E_1} + \frac{1}{O_1+2} + \frac{1}{O_1+4} + \cdots \\ + \frac{1}{O_2} - \frac{1}{E_1+2} - \frac{1}{E_1+4} - \cdots \\ - \frac{1}{E_2} < a. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{O_1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \cdots - \frac{1}{E_1} \\ + \frac{1}{O_1+2} + \frac{1}{O_1+4} + \cdots + \frac{1}{O_2} - \frac{1}{E_1+2} - \frac{1}{E_1+4} - \cdots - \frac{1}{E_2-2} > a \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \left| 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{O_1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \cdots - \frac{1}{E_1} \right. \\ \left. + \frac{1}{O_1+2} + \frac{1}{O_1+4} + \cdots + \frac{1}{O_2} - \frac{1}{E_1+2} - \frac{1}{E_1+4} - \cdots - \frac{1}{E_2} - a \right| \\ < \frac{1}{E_2}. \end{aligned}$$

Novamente escolha O_3 como o primeiro inteiro ímpar tal que

$$\begin{aligned} a < 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{O_1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \cdots \\ - \frac{1}{E_1} + \frac{1}{O_1+2} + \frac{1}{O_1+4} + \cdots + \frac{1}{O_2} + \cdots \\ - \frac{1}{E_1+2} - \frac{1}{E_1+4} - \cdots - \frac{1}{E_2} + \frac{1}{O_2+2} + \frac{1}{O_2+4} + \cdots + \frac{1}{O_3} \end{aligned}$$

e observe que

$$\begin{aligned} \left| 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{O_1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right. \\ \left. - \frac{1}{6} - \cdots - \frac{1}{E_1} + \frac{1}{O_1+2} + \frac{1}{O_1+4} + \cdots + \frac{1}{O_2} + \cdots \right. \\ \left. - \frac{1}{E_1+2} - \frac{1}{E_1+4} - \cdots - \frac{1}{E_2} + \frac{1}{O_2+2} + \frac{1}{O_2+4} + \cdots + \frac{1}{O_3} - a \right| \\ < \frac{1}{O_3}. \end{aligned}$$

Continue definindo O_k e E_k dessa forma. Como $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{O_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{E_k} = 0$, é evidente que as somas parciais

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{O_1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \\ - \frac{1}{6} - \cdots - \frac{1}{E_1} + \frac{1}{O_1+2} + \frac{1}{O_1+4} + \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{O_2} + \cdots - \frac{1}{E_{k-2} + 2} - \frac{1}{E_{k-2} + 4} - \cdots \\
& - \frac{1}{E_{k-1}} + \frac{1}{O_{k-1} + 2} + \frac{1}{O_{k-1} + 4} + \cdots + \frac{1}{O_k}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{O_1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \\
& - \cdots - \frac{1}{E_1} + \frac{1}{O_1 + 2} + \frac{1}{O_1 + 4} + \cdots + \frac{1}{O_2} + \cdots \\
& - \frac{1}{E_{k-2} + 2} - \frac{1}{E_{k-2} + 4} - \cdots - \frac{1}{E_{k-1}}
\end{aligned}$$

deve convergir para a . Além disso, é evidente que toda soma parcial do rearranjo

$$\begin{aligned}
& 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{O_1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \\
& - \cdots - \frac{1}{E_1} + \frac{1}{O_1 + 2} + \frac{1}{O_1 + 4} + \cdots + \frac{1}{O_2} + \cdots
\end{aligned}$$

está presa entre duas somas parciais extremas. Isso força toda a série reorganizada a convergir para a .

Os próximos dois problemas são semelhantes ao acima, mas, do ponto de vista notacional, são mais fáceis, pois não precisamos nos preocupar em convergir para um número real. Precisamos apenas fazer a reorganização crescer (ou diminuir, no caso de [problema 5.14](#)) sem limite.

Problema 5.13 Mostre que há um rearranjo de $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ que diverge para ∞ . $\square$

Problema 5.14 Mostre que há um rearranjo de $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ que diverge para $-\infty$. $\square$

É divertido saber que podemos reorganizar algumas séries para que elas somem a qualquer valor que desejarmos, mas há uma ideia mais fundamental em jogo aqui. O fato de que os termos negativos da Série Harmônica *divergem* para menos infinito e os termos positivos *divergem* para mais infinito torna a *convergência* da série alternada muito especial.

Em seguida, outro termo positivo é adicionado: aumentando sem limites. Depois, outro termo negativo: diminuindo. E assim por diante. A convergência da Série Harmônica Alternada é o resultado de um equilíbrio delicado entre a tendência de ir para o infinito positivo e de voltar para o infinito negativo. Visto sob essa perspectiva, não é realmente tão surpreendente que reorganizar os termos possa destruir esse equilíbrio delicado. Considere, primeiro adicionarmos 1. Este é um dos termos positivos, então nossa soma está começando a crescer sem limites. Em seguida, adicionamos $-1/2$ que é um dos termos negativos, então nossa soma mudou e agora está começando a diminuir sem limites. Depois, outro termo positivo é adicionado: aumentando sem limites. Depois outro termo negativo: diminuindo. E assim por diante. A convergência da Série Harmônica Alternada é o resultado de um equilíbrio delicado entre a tendência de ir para o infinito positivo e de voltar para o infinito negativo. Visto sob essa perspectiva, não é realmente tão surpreendente que reorganizar os termos possa destruir esse equilíbrio delicado.

Naturalmente, a Série Harmônica alternada não é a única série desse tipo. Qualquer série assim é dita convergente "condicionalmente"— a condição é o arranjo específico dos termos.

Para deixar a questão ainda mais complexa, algumas séries satisfazem a propriedade comutativa. Mais especificamente, pode-se mostrar que qualquer rearranjo da série $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots$ deve convergir para o mesmo valor da série original (que por acaso é $\int_{x=0}^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx \approx .8224670334$). Por que uma série se comporta tão bem enquanto a outra não?

Questões como essas e, mais geralmente, a validade do uso do infinitamente pequeno e do infinitamente grande certamente existiam nos anos 1700, mas foram ofuscadas pela utilidade do cálculo. De fato, questões fundamentais levantadas pelos exemplos acima, embora certamente interessantes e importantes, não impediram significativamente a exploração do cálculo no estudo de fenômenos físicos. No entanto, o limite acabou sendo ultrapassado a tal ponto que nem mesmo o matemático mais prático conseguiu evitar as questões fundamentais.

5.3 Problemas adicionais

Problema 5.15 Use a fórmula de Taylor para encontrar a série de Taylor da função dada expandida em torno do ponto a .

(a) $f(x) = \ln(1+x)$, $a = 0$

(b) $f(x) = e^x$, $a = -1$

(c) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $a = 0$

(d) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $a = 1$

□

Parte II

Interregno

Capítulo 6

Joseph Fourier: O Homem Que Quebrou o Cálculo

6.1 Joseph Fourier e sua série

A aplicação da matemática a problemas físicos como o fluxo de calor em um corpo sólido atraiu muita atenção no final do século XVIII e no início do século XIX. Uma das pessoas que atacou o problema do fluxo de calor foi



Figure 6.1 Jean Baptiste Joseph Fourier¹¹

Jean Baptiste Joseph Fourier. Fourier submeteu um manuscrito sobre o assunto, *Sobre a propagação do calor* (*Sobre a Propagação do Calor*), para o Instituto Nacional de Ciências e Artes em 1807. Essas ideias foram posteriormente publicadas em *A teoria analítica do desafio* (*A Teoria Analítica do Calor* (1822)).

Para examinar as ideias de Fourier, considere o exemplo de um fio fino de comprimento um, perfeitamente isolado e cujas extremidades são mantidas a uma temperatura fixa de zero. Dada uma distribuição de temperatura inicial no fio, o problema é monitorar a temperatura do fio em qualquer ponto. x e a qualquer momento t . Especificamente, se deixarmos $u(x, t)$ denota a temperatura do fio no ponto $x \in [0, 1]$ na época $t \geq 0$, então pode ser demonstrado que u deve satisfazer a equação de calor unidimensional $\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$, onde ρ^2 é uma constante positiva conhecida como difusividade térmica. Se a distribuição de temperatura inicial for dada pela função $f(x)$,

¹¹mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fourier/

então o u estamos buscando deve satisfazer todos os seguintes

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(1, t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \forall x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Para resolver isso, Fourier empregou o que hoje é conhecido como método de separação de variáveis de Fourier. Especificamente, Fourier procurou soluções da forma $u(x, t) = X(x)T(t)$; ou seja, soluções onde o x -parte pode ser separada da t -parte. Assumindo que u tem esta forma, obtemos $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T$ e $\frac{\partial u}{\partial t} = XT'$. Substituindo-os na equação diferencial $\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$, nós obtemos

$$\rho^2 X''T = XT' \text{ or } \frac{X''}{X} = \frac{T'}{\rho^2 T}.$$

Como o lado esquerdo não envolve t 's e o lado direito não envolve nada x 's, ambos os lados devem ser iguais a uma constante k . Assim temos

$$X'' = kX \text{ e } T' = \rho^2 kT.$$

Problema 6.2 Mostre que $T = Ce^{\rho^2 kt}$ satisfaz a equação $T' = \rho^2 kT$, onde C , e ρ são constantes arbitrárias. Use a física do problema para mostrar que se u não é constantemente zero, então $k < 0$.

Dica. Considerar $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$. □

Usando o resultado de [problema 6.2](#) naquele $k < 0$, nós vamos deixar $k = -p^2$.

Problema 6.3 Mostre que $X = A \sin(px) + B \cos(px)$ satisfaz a equação $X'' = -p^2 X$, onde A e B são constantes arbitrárias. Use as condições de contorno $u(0, t) = u(1, t) = 0, \forall t \geq 0$ para mostrar que $B = 0$ e $A \sin p = 0$. Conclua que se u não é constantemente zero, então $p = n\pi$, onde n é qualquer inteiro. □

Problema 6.4

Mostre que se u_1 e u_2 satisfazer as equações $\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ e $u(0, t) = u(1, t) = 0, \forall t \geq 0$ then $u = A_1 u_1 + A_2 u_2$ satisfazer estes também, onde A_1 e A_2 são constantes arbitrárias. □

Ao juntar todos esses resultados, Fourier supôs que a solução geral para

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

poderia ser expressa como a série

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(\rho n \pi)^2 t} \sin(n \pi x).$$

Só falta ter u satisfazer a condição inicial $u(x, 0) = f(x), \forall x \in [0, 1]$. Ou seja, precisamos encontrar coeficientes A_n , de modo que

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n \pi x).$$

A ideia de representar uma função como uma série de ondas senoidais foi proposta por Daniel Bernoulli em 1753, ao examinar o problema de modelar

uma corda vibrante. Infelizmente para Bernoulli, ele não sabia como calcular os coeficientes em tal representação em série. O que distinguiu Fourier foi o fato de ele ter desenvolvido uma técnica para calcular esses coeficientes. A chave está no resultado do seguinte problema.

Problema 6.5 Deixar n e m ser inteiros positivos. Mostrar

$$\int_{x=0}^1 \sin(n\pi x) \sin(m\pi x) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{e } n \neq m \\ \frac{1}{2} & \text{e } n = m \end{cases}.$$

□

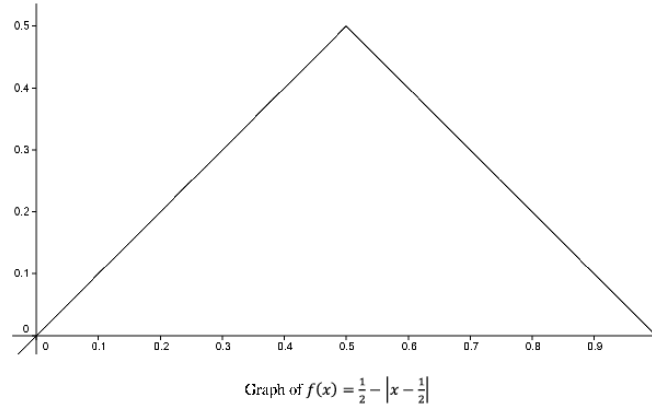
Armado com o resultado de [Problema 6.5](#), Fourier poderia calcular os coeficientes A_n na representação da série $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x)$ da seguinte maneira. Já que estamos tentando encontrar A_n para um particular (embora geral) n , alteraremos temporariamente o índice na soma de n para j . Com isso em mente, considere

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^1 f(x) \sin(n\pi x) \, dx &= \int_{x=0}^1 \left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j \sin(j\pi x) \right) \sin(n\pi x) \, dx \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} A_j \int_{x=0}^1 \sin(j\pi x) \sin(n\pi x) \, dx \\ &= A_n \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Isso leva à fórmula $A_n = 2 \int_{x=0}^1 f(x) \sin(n\pi x) \, dx$.

A série acima $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x)$ com $A_n = 2 \int_{x=0}^1 f(x) \sin(n\pi x) \, dx$ é chamado de *Série de Fourier (seno) de f* .

Exemplo 6.6 Vamos aplicar isso à seguinte função, $f(x) = \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}|$, cujo gráfico desta função é visto abaixo.



□

Problema 6.7 Deixar n seja um número inteiro positivo. Mostre que se

$$f(x) = \frac{1}{2} - \left|x - \frac{1}{2}\right|$$

então

$$\int_{x=0}^1 f(x) \sin(n\pi x) \, dx = \frac{2}{(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

e mostrar que a série de senos de Fourier de f é dado por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin(n\pi x) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin((2k+1)\pi x).$$

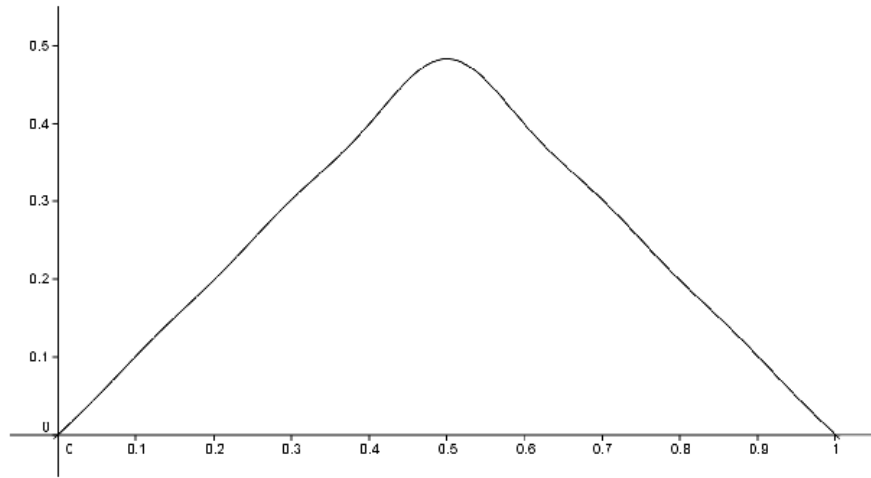
□

Para verificar se esta série realmente representa f sobre $[0, 1]$, Deixar

$$S_N(x) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin((2k+1)\pi x)$$

seja o N^{th} soma parcial da série e use a ferramenta gráfica abaixo para visualizar o gráfico de $S_N(x)$ para vários valores de N .

Aquilo é, S_N denota o N^{th} soma parcial da série. Vamos representar graficamente S_N para $N = 1, 2, 5, 50$.



$$S_5(x) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^5 \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin((2k+1)\pi x)$$

Figure 6.8

Como você pode ver, parece que à medida que adicionamos mais termos à soma parcial, S_N , parece cada vez mais com a função original $f(x) = \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}|$. Isso nos levaria a crer que a série converge para a função e que

$$f(x) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin((2k+1)\pi x). \quad (\text{II.1})$$

é uma representação válida de f como uma série de Fourier.

Lembre-se de que, quando representamos uma função como uma série de potências, diferenciamos e integramos livremente a série termo por termo, como se fosse um polinômio. Vamos fazer o mesmo com esta série de Fourier.

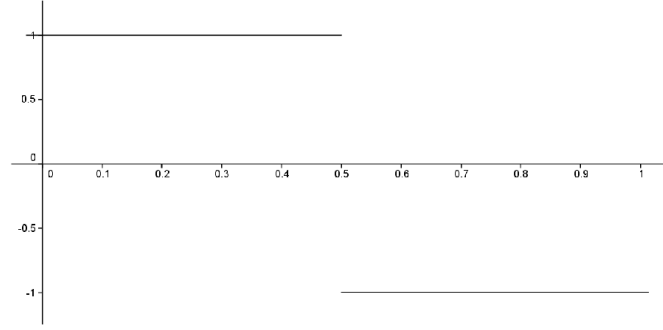
Para começar, observe que a derivada de

$$f(x) = \frac{1}{2} - \left| x - \frac{1}{2} \right|$$

é dado por

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}.$$

Esta derivada não existe em $x = \frac{1}{2}$ e seu gráfico é dado por

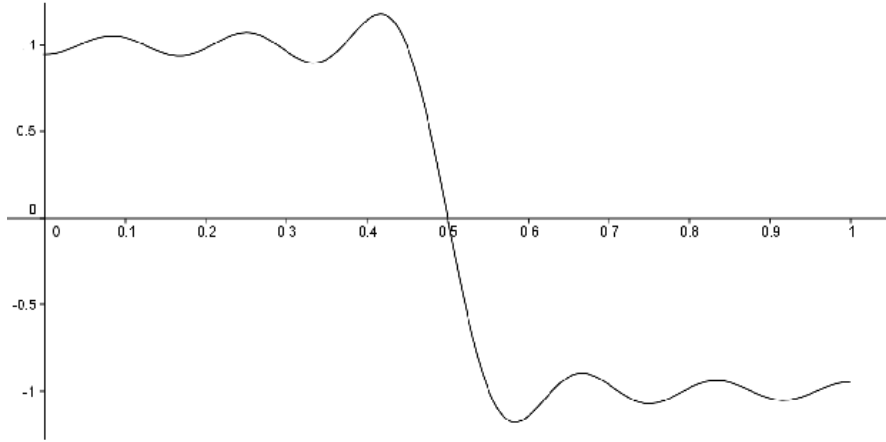


Graph of $f'(x)$

Se diferenciarmos a série de Fourier termo a termo, obtemos

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \cos((2k+1)\pi x).$$

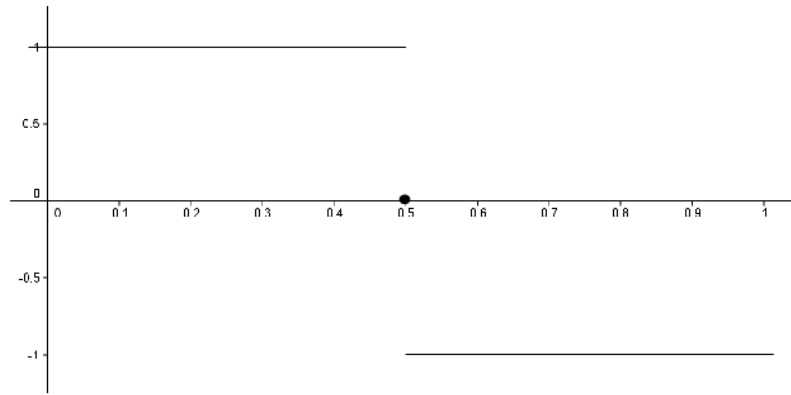
Novamente, se deixarmos $C_N(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \cos((2k+1)\pi x)$ seja o N^{th} soma parcial desta série de cossenos de Fourier e gráfico $C_N(x)$ para $N = 1, 2, 5, 50$, nós obtemos



$$C_5(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^5 \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos((2k+1)\pi x)$$

Figure 6.9

Na verdade, se representássemos graficamente a série $\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \cos((2k+1)\pi x)$, nós obteríamos



Graph of $\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos((2k+1)\pi x)$

Observe que isso concorda com o gráfico de f' , exceto que f' não existia em $x = \frac{1}{2}$, e esta série assume o valor 0 no $x = \frac{1}{2}$. Observe também que toda soma parcial desta série é contínua, visto que é uma combinação finita de funções cosseno contínuas. Isso está de acordo com o que você aprendeu em cálculo: a soma (finita) de funções contínuas é sempre contínua. Nos anos 1700, isso também era considerado verdadeiro para séries infinitas, pois toda vez que uma série de potências convergia para uma função, essa função era contínua. Isso nunca falhou para séries de potências, então este exemplo foi um pouco desconcertante, pois é um exemplo da soma de *infinitamente muitos* funções contínuas que, neste caso, são descontínuas. Seria possível que houvesse alguma série de potências que convergisse para uma função que não fosse contínua? Mesmo que não houvesse, qual seria a diferença entre séries de potências e esta série de Fourier?

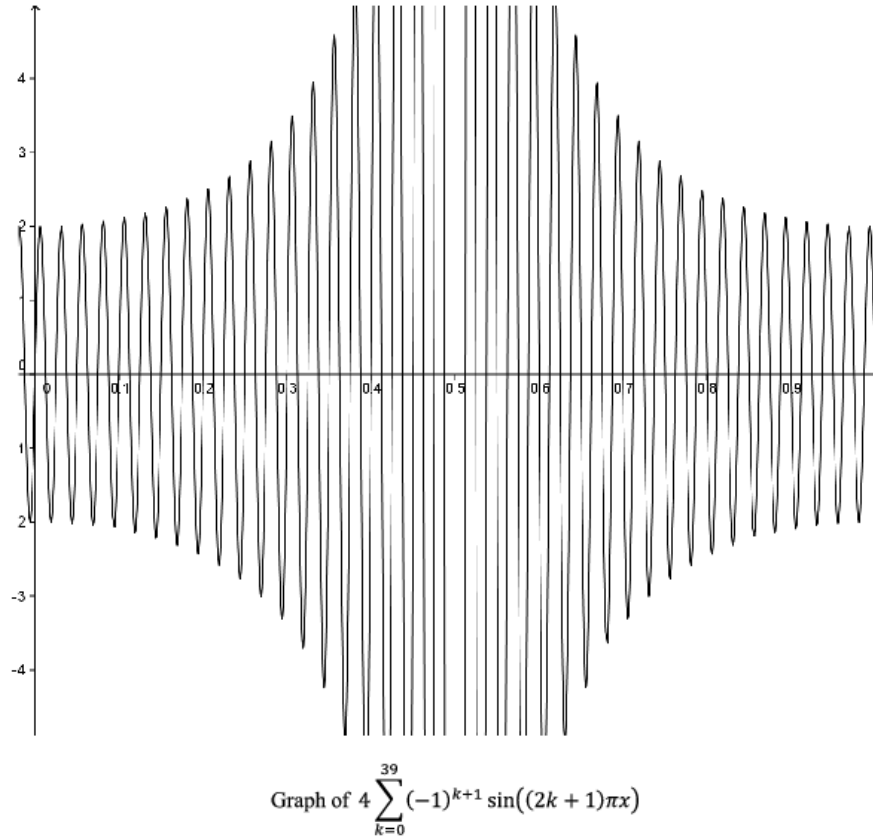
Ainda mais desconcertante é o que acontece se tentarmos diferenciar as séries

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \cos((2k+1)\pi x)$$

termo a termo. Dado o gráfico acima desta série, a derivada dela deve ser constantemente 0, exceto em $x = \frac{1}{2}$, onde a derivada não existiria. Usando o velho ditado de que a derivada de uma soma é a soma das derivadas, diferenciamos esta série termo a termo para obter a série

$$4 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \sin((2k+1)\pi x).$$

Se somarmos os primeiros quarenta termos desta série, obtemos

**Figure 6.10**

Sabíamos que poderia haver um problema em $x = \frac{1}{2}$. Mas isso é loucura! A série parece não estar chegando a zero!

Problema 6.11 Mostre que quando $x = \frac{1}{4}$

$$4 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \sin((2k+1)\pi x) = 4 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots \right).$$

□

Problema 6.11 mostra que quando diferenciamos a série

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \cos((2k+1)\pi x)$$

termo por termo, essa série diferenciada não converge para nada $x = \frac{1}{4}$. Muito menos convergir para zero. Neste caso, a antiga regra do cálculo de que a derivada de uma soma é a soma das derivadas não se aplica a esta soma infinita, embora se aplicasse antes. Como se a questão da continuidade já não fosse ruim o suficiente antes, esta era ainda pior. Séries de potências eram rotineiramente diferenciadas e integradas termo a termo. Isso fazia parte do seu apelo. Eram tratadas como “polinômios infinitos”. Ou há alguma série de potências à espreita que se recusa a se comportar bem, ou há alguma propriedade que as séries de potências têm que nem todas as séries de Fourier têm.

Será que tudo o que fizemos em [Capítulo 5](#) era falso?

Felizmente, a resposta a essa pergunta é não. Séries de potências são geralmente muito mais bem-comportadas do que séries de Fourier. Sempre que uma série de potências converge, a função para a qual converge será contínua. Desde que se permaneça dentro do intervalo de convergência, as séries de potências podem ser diferenciadas e integradas termo a termo. As séries de potências têm algo a seu favor que uma série de Fourier comum não tem. (Precisamos desenvolver o maquinário para saber o que é esse algo.) Nada disso é mais óbvio para nós do que era para os matemáticos no início do século XIX. O que eles sabiam era que confiar na intuição era perigoso e que formulações rigorosas eram necessárias para justificar ou rejeitar essas intuições. Em certo sentido, o século XIX foi a “manhã seguinte” à festa matemática que durou todo o século XVIII.

Problema 6.12 Deixar n e m ser inteiros positivos. Mostrar

$$\int_{x=0}^1 \cos(n\pi x) \cos(m\pi x) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ \frac{1}{2} & \text{se } n = m \end{cases}.$$

□

Problema 6.13 Use o resultado de [Problema 6.12](#) para mostrar que se

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\pi x)$$

sobre $[0, 1]$, então

$$B_m = 2 \int_{x=0}^1 f(x) \cos(m\pi x) \, dx.$$

□

Problema 6.14 Aplique o resultado de [Problema 6.13](#) para mostrar que a série de cossenos de Fourier de $f(x) = x - \frac{1}{2}$ sobre $[0, 1]$ é dado por

$$\frac{-4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\pi x).$$

Deixar $C(x, N) = \frac{-4}{\pi^2} \sum_{k=0}^N \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\pi x)$ e plotar $C(x, N)$ para $N = 1, 2, 5, 50$ $x \in [0, 1]$. Como isso se compara à função $f(x) = x - \frac{1}{2}$ sobre $[0, 1]$? E se você planejar isso para $x \in [0, 2]$? □

Problema 6.15

(a) Diferencie as séries

$$\frac{-4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\pi x)$$

termo por termo e plotar várias somas parciais para essa série em $[0, 1]$. Como isso se compara à derivada de $f(x) = x - \frac{1}{2}$ nesse intervalo?

(b) Diferencie a série que você obteve na parte a e trace várias somas parciais dela em $[0, 1]$. Como isso se compara à segunda derivada de $f(x) = x - \frac{1}{2}$ nesse intervalo?

□

Parte III

In Which We Find (Some) Answers

Capítulo 7

Convergência de Sequências e Séries

7.1 Sequências de Números Reais

In Capítulo ??, Nós desenvolvemos a equação. $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$, e mencionamos que havia limitações para essa representação em série de potências. Por exemplo, ao substituir $x = 1$ e $x = -1$ nessa expressão, leva a

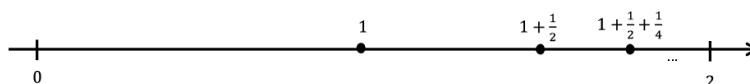
$$1 + 1 + 1 + \dots = \frac{1}{0} \text{ e } 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$$

o que é bastante difícil de aceitar. Por outro lado, se substituirmos $x = \frac{1}{2}$ na expressão, obtemos $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots = 2$ o que parece mais aceitável até pensarmos sobre isso. Podemos somar dois números pelo método que todos aprendemos na escola. Ou três. Ou qualquer conjunto finito de números, pelo menos em princípio. Mas infinitamente muitos? O que isso realmente significa? Antes de podermos somar infinitamente muitos números, precisamos encontrar uma forma de dar sentido a essa ideia.

Para fazer isso, examinamos uma soma infinita pensando nela como uma sequência de somas parciais finitas. No nosso exemplo, teríamos a seguinte sequência de somas parciais.

$$\left(1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2, 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3, \dots, \sum_{j=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^j, \dots\right).$$

Podemos representar essas somas em uma reta numérica para ver a que elas tendem à medida que n fica grande.



Como cada soma parcial está localizada no ponto médio entre a soma parcial anterior e 2, É razoável supor que essas somas tendem ao número 2. De fato, você provavelmente já viu uma expressão como $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^j\right) = 2$ justificada por um argumento semelhante. Claro, confiar em imagens e palavras assim é aceitável se estivermos satisfeitos apenas com a intuição. No entanto, devemos ser capazes de tornar essas intuições rigorosas sem depender de imagens ou de palavras vagas como "aproxima-se".

Sem dúvida você está se perguntando: "O que há de errado com a palavra 'aproxima-se'? Ela me parece clara o suficiente." Isso costuma ser um ponto problemático. Mas, se pensarmos com atenção sobre o que queremos dizer com a palavra "aproximar-se", veremos que há uma suposição implícita que poderá nos causar dificuldades mais tarde, se não a tornarmos explícita.

Para entender isso, considere a sequência $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$. Claramente ela "aproxima-se" de zero, certo? Mas, ela não "aproxima-se" também de -1 ? Sim, no sentido de que cada termo fica mais próximo de -1 do que o termo anterior. Mas ela também "aproxima-se" de -2 , -3 , ou até mesmo de -1000 no mesmo sentido. Esse é o problema da palavra "aproxima-se". Ela apenas indica que estamos ficando mais próximos de algo do que estávamos no passo anterior. Porém, isso não *nos* diz que estamos realmente ficando perto. Como a Lua se move em uma órbita elíptica ao redor da Terra durante parte de cada mês, ela está "aproximando-se" da Terra. A Lua fica mais *perto* da Terra, mas, felizmente, ela não chega a ficar *próxima* da Terra. A suposição implícita a que nos referimos anteriormente é esta: quando dizemos que a sequência $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ "aproxima-se" de zero, queremos dizer que ela está ficando *próxima*, e não apenas mais *próxima*. Normalmente, esse tipo de ambiguidade na linguagem é relativamente inofensiva. Quando usamos "aproxima-se" numa conversa informal, geralmente conseguimos entender pelo contexto se queremos dizer "ficar perto de" ou "ficar mais perto de". Mas, ao falar matematicamente, precisamos ser mais cuidadosos e explícitos na linguagem que usamos.

Então, como podemos mudar a linguagem que usamos para eliminar essa ambiguidade? Vamos começar reconhecendo, de forma rigorosa, o que queremos dizer quando afirmamos que uma sequência converge para zero. Por exemplo, você provavelmente gostaria de dizer que a sequência $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots) = (\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ converge para zero. Existe uma maneira de dar esse significado sem depender de imagens ou intuição?

Uma maneira seria dizer que podemos fazer $\frac{1}{n}$ tão próximo de zero quanto quisermos, desde que façamos n grande o suficiente. Mas mesmo isso precisa ser mais específico. Por exemplo, podemos obter $\frac{1}{n}$ a uma distância de $.1$ de 0 desde que façamos $n > 10$, podemos obter $\frac{1}{n}$ a uma distância de $.01$ de 0 desde que façamos $n > 100$, etc. Após alguns exemplos assim, fica claro que, dada qualquer distância arbitrária $\varepsilon > 0$, podemos chegar $\frac{1}{n}$ a uma distância de ε de 0 desde que façamos $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Isso nos leva à seguinte definição.

Definição 7.1 Let $(s_n) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$ Seja uma sequência de números reais. Dizemos que (s_n) **converge para 0** e escrevemos $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$ desde que, para qualquer $\varepsilon > 0$, exista um número real N tal que, se $n > N$, então $|s_n| < \varepsilon$.

◇

Notas sobre [Definition 7.1](#):

1. Esta definição é a versão formal da ideia que acabamos de discutir; isto é, dado um distância arbitrária ε , devemos ser capazes de encontrar um número específico N tal que s_n esteja dentro de ε de 0 , sempre que $n > N$. O N é a resposta para a pergunta de quão grande é "grande o suficiente" para colocar s_n tão próximo de 0 .
2. Mesmo que não tenhamos precisado disso no exemplo $(\frac{1}{n})$, o valor absoluto aparece na definição porque precisamos medir a *distância* de s_n a 0 menor que ε . Sem o valor absoluto na definição, poderíamos "provar" afirmações absurdas como $\lim_{n \rightarrow \infty} -n = 0$, o que obviamente não queremos.
3. A afirmação $|s_n| < \varepsilon$ também pode ser escrita como $-\varepsilon < s_n < \varepsilon$ ou $s_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. (veja a [Problema 7.2](#) abaixo.) Qualquer uma dessas formulações equivalentes pode ser usada para provar a convergência.

Dependendo da aplicação, uma delas pode ser mais vantajosa de usar do que as outras.

4. Sempre que um N pode ser encontrado que funcione para um determinado ε , qualquer número $M > N$ vai funcionar para isso ε bem como, já que $\varepsilon > M$ então $n > N$.

Problema 7.2 Sejam a e b números reais com $b > 0$. Prove $|a| < b$ se e somente se $-b < a < b$. Observe que isso pode ser estendido para $|a| \leq b$ se e somente se $-b \leq a \leq b$. $\square$

Para ilustrar como esta definição torna rigorosas as ideias acima, vamos usá-la para provar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Proof. Deixar $\varepsilon > 0$ ser dado. Deixe $N = \frac{1}{\varepsilon}$. Se $n > N$, então $n > \frac{1}{\varepsilon}$ and so $|\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Portanto, por definição, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. $\blacksquare$

Observe que esta prova é rigorosa e não faz referência a noções vagas como “ficar menor” ou “aproximar-se do infinito”. Ela tem três componentes:

1. proporcionar o desafio de uma distância $\varepsilon > 0$,
2. identificar um número real N , e
3. mostre que este N funciona para este dado ε .

Também não há explicação sobre a origem de N . Embora seja verdade que essa escolha de N não seja surpreendente, considerando o “trabalho de sucata” que fizemos antes da definição, a motivação para obtê-la não está na prova formal, nem é necessária. Na verdade, esse trabalho de sucata normalmente não é incluído em uma prova formal. Por exemplo, considere o seguinte.

Exemplo 7.3 Use a definição de convergência para zero para provar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

$\square$

Proof. Deixar $\varepsilon > 0$. Deixar $N = \frac{1}{\varepsilon}$. Se $n > N$, então $n > \frac{1}{\varepsilon}$ e $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Por isso $\left| \frac{\sin(n)}{n} \right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$. Portanto, por definição, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$. $\blacksquare$

Observe que o N surgiu do nada, mas você provavelmente pode ver o processo de pensamento que levou a essa escolha: Precisávamos usar a desigualdade $|\sin n| \leq 1$. Novamente, este trabalho de recorte não faz parte da prova formal, mas normalmente é necessário para encontrar o que N deveria ser. Você pode conseguir resolver o próximo problema sem fazer nenhum trabalho de recorte primeiro, mas não hesite em fazê-lo se precisar.

Problema 7.4 Use a definição de convergência para zero para provar o seguinte.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

$\square$

À medida que as sequências ficam mais complicadas, fazer o scrapbook com antecedência se tornará mais necessário.

Exemplo 7.5 Use a definição de convergência para zero para provar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+4}{n^2+1} = 0.$$

SCRAPWORK

Dado um $\varepsilon > 0$, precisamos ver o quão grande fazer n para garantir que $|\frac{n+4}{n^2+1}| < \varepsilon$. Primeiro observe que $\frac{n+4}{n^2+1} < \frac{n+4}{n^2}$. Observe também que se $n > 4$, então $n+4 < n+n = 2n$. Então, enquanto $n > 4$, nós temos $\frac{n+4}{n^2+1} < \frac{n+4}{n^2} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$. Podemos fazer isso menos que ε se fizermos $n > \frac{2}{\varepsilon}$. Isso significa que precisamos fazer $n > 4$ e $n > \frac{2}{\varepsilon}$, simultaneamente. Isso pode ser feito se deixarmos N ser o máximo desses dois números. Esse tipo de coisa acontece regularmente, então a notação $N = \max(4, \frac{2}{\varepsilon})$ foi desenvolvido para significar o máximo desses dois números. Observe que se $N = \max(4, \frac{2}{\varepsilon})$ então $N \geq 4$ e $N \geq \frac{2}{\varepsilon}$. Agora estamos prontos para a prova formal. $\square$

Proof. Deixar $\varepsilon > 0$. Deixar $N = \max(4, \frac{2}{\varepsilon})$. Se $n > N$, então $n > 4$ e $n > \frac{2}{\varepsilon}$. Assim temos $n > 4$ e $\frac{2}{n} < \varepsilon$. Portanto

$$\left| \frac{n+4}{n^2+1} \right| = \frac{n+4}{n^2+1} < \frac{n+4}{n^2} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} < \varepsilon.$$

Portanto, por definição, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+4}{n^2+1} = 0$. $\blacksquare$

Mais uma vez ressaltamos que o scrapwork não é *explicitamente* uma parte da prova formal. No entanto, se você olhar com atenção, sempre encontrará fragmentos na prova formal.

Problema 7.6 Use a definição de convergência para zero para provar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4n + 1}{n^3} = 0.$$

$\square$

Problema 7.7 Deixar b seja um número real diferente de zero com $|b| < 1$ e seja $\varepsilon > 0$.

- (a) Resolva a desigualdade $|b|^n < \varepsilon$ para n
- (b) Use a parte (a) para provar $\lim_{n \rightarrow \infty} b^n = 0$.

$\square$

Podemos negar essa definição para provar que uma sequência específica não converge para zero.

Exemplo 7.8 Use a definição para provar que a sequência

$$(1 + (-1)^n)_{n=0}^{\infty} = (2, 0, 2, 0, 2, \dots)$$

não converge para zero. $\square$

Antes de fornecermos esta prova, vamos analisar o que isso significa para uma sequência (s_n) para não convergir para zero. Convergir para zero significa que sempre que uma distância $\varepsilon > 0$ é dado, devemos ser capazes de responder com um número N tal que $|s_n| < \varepsilon$ para cada $n > N$. Para que isso não aconteça, precisamos ser capazes de encontrar algum $\varepsilon > 0$ tal que nenhuma escolha de N funcione. É claro que, se encontrarmos tal ε , qualquer outro menor não terá tal N , mas precisamos apenas de um para nos atrapalhar. Se você observar o exemplo por tempo suficiente, verá que qualquer ε com $0 < \varepsilon \leq 2$

causará problemas. Para nossos propósitos, deixaremos $\varepsilon = 2$.

Proof. Seja $\varepsilon = 2$ e seja $N \in \mathbb{N}$ qualquer número inteiro. Se formos k qualquer número inteiro não negativo com $k > \frac{N}{2}$, então $n = 2k > N$, mas $|1 + (-1)^n| = 2$. Portanto, nenhuma escolha de N satisfará as condições da definição para este ε , (ou seja, que $|1 + (-1)^n| < 2$ para todos os $n > N$) e assim $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + (-1)^n) \neq 0$. ■

Problema 7.9 Negue a definição de $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$ para fornecer uma definição formal para $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \neq 0$. □

Problema 7.10 Use a definição para provar $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+100} \neq 0$. □

Agora que entendemos como provar rigorosamente que uma sequência converge para zero, vamos generalizar isso para uma definição formal de uma sequência que converge para algo diferente. Basicamente, queremos dizer que uma sequência (s_n) converge para um número real s , desde que a diferença $(s_n - s)$ converge para zero. Isso nos leva à seguinte definição:

Definição 7.11 Seja $(s_n) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$ seja uma sequência de números reais e seja s um número real. Dizemos que (s_n) {converge para } s e escrevemos $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ desde que, para qualquer $\varepsilon > 0$, exista um número real N tal que, se $n > N$, então $|s_n - s| < \varepsilon$. ◇

{Notas sobre Definição 7.11}

1. Claramente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \text{ se e somente se } \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s) = 0.$$

2. Observe novamente que isso diz que podemos tornar s_n o mais próximo possível de s (dentro de ε) tornando n grande o suficiente ($> N$). Como antes, esta definição torna essas noções muito específicas.
3. Observe que $|s_n - s| < \varepsilon$ pode ser escrito nas seguintes formas equivalentes

- (a) $|s_n - s| < \varepsilon$
- (b) $-\varepsilon < s_n - s < \varepsilon$
- (c) $s - \varepsilon < s_n < s + \varepsilon$
- (d) $s_n \in (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$

e somos livres para usar qualquer um deles que seja conveniente no momento.

Como exemplo, vamos usar esta definição para provar que a sequência em Problema 7.10, na verdade, converge para 1.

Exemplo 7.12 Provar $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+100} = 1$.

SCRAPWORK

Dado um $\varepsilon > 0$, precisamos obter $\left| \frac{n}{n+100} - 1 \right| < \varepsilon$. Isso nos leva a fazer alguma álgebra.

$$\left| \frac{n}{n+100} - 1 \right| = \left| \frac{n - (n+100)}{n+100} \right| \leq \frac{100}{n}.$$

Isso, por sua vez, parece sugerir que $N = \frac{100}{\varepsilon}$ deve funcionar. □

Proof. Seja $\varepsilon > 0$. deixar $N = \frac{100}{\varepsilon}$. Se $n > N$, então $n > \frac{100}{\varepsilon}$ e assim $\frac{100}{n} < \varepsilon$. Por isso

$$\left| \frac{n}{n+100} - 1 \right| = \left| \frac{n - (n+100)}{n+100} \right| = \frac{100}{n+100} < \frac{100}{n} < \varepsilon.$$

Assim, por definição $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+100} = 1$. ■

Observe novamente que o trabalho de recorte não faz parte da prova formal e o autor de uma prova não é obrigado a dizer de onde veio a escolha de N (embora o processo de pensamento geralmente possa ser visto na prova formal). A prova formal contém apenas as três partes necessárias: fornecer o desafio de um arbitrário $\varepsilon > 0$, fornecer um N específico e mostrar que este N funciona para o dado ε .

Observe também que, dada uma sequência específica como $\left(\frac{n}{n+100}\right)$, a definição não indica qual seria o limite se, de fato, ele existisse. Uma vez feita uma estimativa fundamentada sobre qual deveria ser o limite, a definição apenas verifica se essa intuição está correta.

Isso nos leva à seguinte pergunta: se a intuição é necessária para determinar qual deve ser o limite de uma sequência, então qual é o propósito dessa definição relativamente não intuitiva e complicada?

Lembre-se de que, quando essas formulações rigorosas foram desenvolvidas, noções intuitivas de convergência já estavam em vigor e tinham sido utilizadas com grande sucesso. Esta definição foi desenvolvida para abordar as questões fundamentais. Nossas intuições poderiam ser verificadas de forma concreta e irreprensível? Este era o propósito desta definição não intuitiva. Ela deveria ser usada para verificar se nossa intuição estava, de fato, correta e fazê-lo de uma maneira bem prescrita. Por exemplo, se $b > 0$ é um número fixo, então você provavelmente diria que, à medida que n se aproxima do infinito, $b^{(\frac{1}{n})}$ aproxima-se de $b^0 = 1$. Afinal, já provamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Devemos ser capazes de sustentar essa intuição com nossa definição rigorosa.

Problema 7.13 deixar $b > 0$. Use a definição para provar $\lim_{n \rightarrow \infty} b^{(\frac{1}{n})} = 1$.

Hint. Você provavelmente precisará separar isso em dois casos: $0 < b < 1$ e $b \geq 1$. □

Problema 7.14

- (a) Fornecer uma definição rigorosa para $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \neq s$.
- (b) Use sua definição para mostrar que para qualquer número real a , $\lim_{n \rightarrow \infty} ((-1)^n) \neq a$.

Hint. Escolha $\varepsilon = 1$ e use o fato de que $|a - (-1)^n| < 1$ é equivalente a $(-1)^n - 1 < a < (-1)^n + 1$ para mostrar que nenhuma escolha de N funcionará para este ε .

□

7.2 O Limite como Ferramenta Primária

Como você viu nas seções anteriores, a definição formal da convergência de uma sequência visa capturar rigorosamente nossa compreensão intuitiva de convergência. No entanto, a definição em si é uma ferramenta difícil de manejar. Se ao menos houvesse uma maneira de ser rigoroso sem ter que recorrer à

definição todas as vezes... Felizmente, existe uma maneira. Se pudéssemos usar a definição para provar algumas regras gerais sobre limites, poderíamos usá-las sempre que se aplicassem e ter a certeza de que tudo ainda era rigoroso. Algumas delas devem parecer familiares do cálculo.

Problema 7.15 Seja $(c)_{n=1}^{\infty} = (c, c, c, \dots)$ seja uma sequência constante. Mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$. $\square$

Para provar os teoremas de limite familiares, o seguinte será uma ferramenta muito útil.

Lema 7.16

Triangle Inequality: *Sejam a e b números reais. Então*

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Desigualdade Triangular Reversa: *Sejam a e b números reais. Então*

$$|a| - |b| \leq |a - b|$$

Problema 7.17

(a) Provar [Lema 7.16](#).

Hint. Para a desigualdade do triângulo reverso, considere $|a| = |a - b + b|$.

(b) Mostrar $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Hint. Você quer mostrar $|a| - |b| \leq |a - b|$ e $-(|a| - |b|) \leq |a - b|$.

$\square$

Teorema 7.18 Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$.

Frequentemente, enunciaremos informalmente este teorema como “o limite de uma soma é a soma dos limites”. No entanto, para ser absolutamente preciso, o que ele diz é que, se já sabemos que duas sequências convergem, então a sequência formada pela soma dos termos correspondentes dessas duas sequências convergirá e, de fato, convergirá para a soma desses limites individuais. Forneceremos o material para a demonstração disso e deixaremos a descrição formal como exercício. Observe o uso da desigualdade triangular na demonstração.

Problema 7.19 Prove [Teorema 7.18](#).

SCRAPWORK:

Se deixarmos $\varepsilon > 0$, então queremos N de modo que, se $n > N$, então $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$. Sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, então podemos tornar $|a_n - a|$ e $|b_n - b|$ tão pequenos quanto desejarmos, desde que tornemos n grande o suficiente. Vamos voltar ao que queremos para ver se conseguimos fechar a lacuna entre o que sabemos e o que queremos.

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$$

pela desigualdade triangular. Para tornar tudo isso menor que ε , faz sentido tornar cada parte menor que $\frac{\varepsilon}{2}$. faz sentido tornar cada parte menor que $\frac{\varepsilon}{2}$. Felizmente, podemos fazer isso, pois as definições de $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ nos permitem tornar $|a_n - a|$ e $|b_n - b|$ arbitrariamente pequenos. Especificamente, como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, existe um N_1 tal que, se $n > N_1$, então $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Além disso, como $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, existe um N_2 tal que, se $n > N_2$,

então $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Como queremos que ambos ocorram, faz sentido deixar $N = \max(N_1, N_2)$. Este deve ser o N que buscamos. $\square$

Teorema 7.20 Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$.

SCRAPWORK: Dado $\varepsilon > 0$, queremos N de modo que, se $n > N$, então $|a_n b_n - ab| < \varepsilon$. Um dos truques padrão em análise é “descancelar”. Neste caso, subtrairemos e adicionaremos um termo conveniente. Normalmente, estes se “cancelariam”, e é por isso que dizemos que descancelamos para colocá-los de volta. Você já viu um exemplo disso ao provar a Desigualdade Triangular Reversa. (Problema 7.17). No caso presente, considere

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\ &= |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a|. \end{aligned}$$

Podemos tornar tudo isso menor que ε , desde que tornemos cada termo da soma menor que $\frac{\varepsilon}{2}$. Podemos tornar $|b| |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ se tornarmos $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|}$. Mas espere! E se $b = 0$? Podemos tratar isso como um caso separado ou podemos fazer o seguinte “truque inteligente”. Observe que podemos adicionar mais uma linha à sequência de desigualdades acima: $|a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| < |a_n| |b_n - b| + (|b| + 1) |a_n - a|$. Agora podemos fazer $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}$ e não se preocupe em dividir por zero.

Criar $|a_n| |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ requer um pouco mais de sutileza. À primeira vista, seria tentador tentar criar $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a_n|}$. Mesmo ignorando o fato de que poderíamos estar dividindo por zero (o que poderíamos lidar), temos um problema maior. De acordo com a definição de $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, podemos tornar $|b_n - b|$ menor que qualquer número positivo fixo, desde que tornemos n grande o suficiente (maior que algum N que acompanha um dado épsilon). Infelizmente, $\frac{\varepsilon}{2|a_n|}$ não é fixo, pois contém a variável n ; Não há razão para acreditar que um único N funcionará com todos eles simultaneamente. Para lidar com esse impasse, precisamos do seguinte:

Lema 7.21 Uma sequência convergente é limitada.

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, então existe $B > 0$ tal que $|a_n| \leq B$ para todo n .

Problema 7.22 Provar Lema 7.21.

Dica. Sabemos que existe N tal que se $n > N$, então $|a_n - a| < 1$. Seja $B = \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{\lceil N \rceil}|, |a| + 1)$, onde $\lceil N \rceil$ representa o menor inteiro maior ou igual a N . Observe também que esta não é uma prova de convergência, portanto, não é seguro pensar em N como um número grande.

Na verdade, esse é um hábito perigoso de se cair, mesmo em provas de convergência. $\square$

Munidos deste limite B , podemos adicionar mais uma desigualdade ao trabalho acima para obter

$$\begin{aligned} |a_n \cdot b_n - a \cdot b| &= |a_n \cdot b_n - a_n \cdot b + a_n \cdot b - a \cdot b| \\ &\leq |a_n \cdot b_n - a_n \cdot b| + |a_n \cdot b - a \cdot b| \\ &= |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| \\ &< B |b_n - b| + (|b| + 1) |a_n - a| \end{aligned}$$

Neste ponto, deveríamos ser capazes de fazer a última linha deste menor que ε .

END OF SCRAPWORK

Problema 7.23 Prove Teorema 7.20. $\square$

Corolário 7.24 (Corolário to Teorema 7.20) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ e $c \in \mathbb{R}$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot a$.

Problema 7.25 Prove Corolário 7.24. $\square$

Assim como Teorema 7.20 diz que o limite de um produto é o produto dos limites, podemos provar o análogo para quocientes.

Teorema 7.26 Suponha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Suponha também que $b \neq 0$ e $b_n \neq 0, \forall n$. Então $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}$.

Problema 7.27 Prove Teorema 7.26.

SCRAPWORK

Para provar isso, vejamos o caso especial de tentar provar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b_n} \right) = \frac{1}{b}$. O caso geral seguirá a partir disso e Teorema 7.20. Considere $\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n||b|}$. Estamos diante do mesmo dilema de antes: precisamos limitar $\left| \frac{1}{b_n} \right|$ acima. Isso significa que precisamos limitar $|b_n|$ para longe de zero (pelo menos para n suficientemente grande).

Isso pode ser feito da seguinte forma. Como $b \neq 0$, então $\frac{|b|}{2} > 0$. Assim, pela definição de $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, existe N_1 tal que se $n > N_1$, então $|b| - |b_n| \leq |b - b_n| < \frac{|b|}{2}$. Assim, quando $n > N_1$, $\frac{|b|}{2} < |b_n|$ e então $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$. Isso diz que para $n > N_1$, $\frac{|b - b_n|}{|b_n||b|} < \frac{2}{|b|^2} |b - b_n|$. Devemos ser capazes de fazer isso menor que um dado $\varepsilon > 0$, desde que façamos n grande o suficiente. $\square$

Esses teoremas nos permitem calcular limites de sequências complicadas e verificar rigorosamente se esses são, de fato, os limites corretos, sem recorrer à definição de um limite.

Problema 7.28 Identifique todos os teoremas usados implicitamente para mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 100n + 1}{5n^3 + 4n^2 - 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(3 - \frac{100}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right)}{n^3 \left(5 + \frac{4}{n} - \frac{7}{n^3} \right)} = \frac{3}{5}.$$

Observe que isso pressupõe a existência de todos os limites individuais. Isso ficará evidente à medida que o limite for decomposto. $\square$

Há mais uma ferramenta que se mostrará valiosa.

Teorema 7.29 Teorema de compressão para sequências

Seja (r_n) , (s_n) , e (t_n) sejam sequências de números reais com $r_n \leq s_n \leq t_n, \forall$ inteiros positivos n . Suponha $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = s = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$. Então (s_n) deve convergir e $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$.

Problema 7.30 Prove Teorema 7.29.

Dica. Este é provavelmente um lugar onde você gostaria de usar $s - \varepsilon < s_n < s + \varepsilon$ em vez de $|s_n - s| < \varepsilon$. $\square$

O Teorema do Compressão é válido mesmo que $r_n \leq s_n \leq t_n$ seja válido apenas para valores suficientemente grandes n ; i.e., para n maior que algum N_0 fixo. Isso é verdade porque quando você encontra um N_1 que funciona na prova original, isso pode ser modificado escolhendo $N = \max(N_0, N_1)$. Observe também que este teorema realmente diz duas coisas: (s_n) converge e converge para s . Esse ponto sutil afeta a maneira como se deve usar corretamente o Teorema do Aperto.

Exemplo 7.31 Prove $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2} = 0$. □

Proof. Observe que $0 \leq \frac{n+1}{n^2} \leq \frac{n+n}{n^2} = \frac{2}{n}$. Desde $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n}$, então pelo Teorema do Aperto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2} = 0$. ■

Observe que esta demonstração é completamente rigorosa. Observe também que esta é a maneira correta de usar o Teorema do Compressão. Aqui está um exemplo de um {imprópria}uso do Teorema do Aperto.

Como *não* provar Exemplo 7.31. Observe que

$$0 \leq \frac{n+1}{n^2} \leq \frac{n+n}{n^2} = \frac{2}{n},$$

então

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2} = 0.$$

Isto é incorreto na forma porque pressupõe que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2}$ existe, o que ainda não sabemos. Se soubéssemos que o limite existe desde o início, então tudo bem. O Teorema do Compressão prova que o limite de fato existe, mas deve ser declarado assim.

Esses teoremas gerais nos permitirão explorar rigorosamente a convergência de séries de potências no próximo capítulo, sem precisar recorrer diretamente à definição de convergência. No entanto, lembre-se de que usamos a definição para provar esses resultados e haverá momentos em que precisaremos aplicá-la diretamente. Antes de entrarmos nisso, vamos examinar a divergência um pouco mais de perto.

7.3 Divergência

Em Teorema 5.12 Vimos que há um rearranjo da série harmônica alternada que diverge para ∞ ou $-\infty$. Nessa seção, não abordamos nenhuma noção formal de divergência. Presumimos, em vez disso, que você já esteja familiarizado com o conceito de divergência, provavelmente por ter estudado cálculo no passado.

No entanto, estamos agora no processo de construção de definições formais e precisamos para os conceitos que usaremos, então definimos a divergência de uma sequência da seguinte forma.

Definição 7.32 Uma sequência de números reais $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ diverge se não convergir para nenhuma $a \in \mathbb{R}$. ◇

Pode parecer desnecessariamente pedante da nossa parte insistir em formalizar uma definição tão óbvia. Afinal, “converge” e “diverge” são opostos em inglês comum. Por que não seriam matematicamente opostos também? Por que temos que nos dar ao trabalho de definir ambos formalmente? Já que são opostos, definir um define implicitamente o outro, não é mesmo?

Uma maneira de responder a essa crítica é afirmar que, em matemática, nós *sempre* trabalhamos com definições precisamente declaradas e argumentos lógicos bem fundamentados.

Mas isso é só mais um pedantismo. É uma maneira de dizer: “Porque nós dissemos”, tudo disfarçado de linguagem imponente. Precisamos fazer melhor do que isso.

Uma razão para fornecer definições formais de convergência e divergência é que, em matemática, frequentemente cooptamos palavras de línguas naturais como o inglês e as imbuímos de um significado matemático que está apenas tangencialmente relacionado à definição original em inglês. Quando pegamos duas dessas palavras que são opostas em inglês e lhes damos significados matemáticos que são *não* opostos pode ser muito confuso, especialmente no começo.

Foi o que aconteceu com as palavras “aberto” e “fechado”. São opostos em inglês: “não aberto” é “fechado”, “não fechado” é “aberto”, e não há nada que seja aberto e fechado. Mas lembre-se de que um intervalo aberto na reta real, (a, b) , é aquele que não inclui *nenhum* de seus pontos finais, enquanto um intervalo fechado, $[a, b]$, é aquele que inclui ambos.

Estes podem parecer opostos à primeira vista, mas não são. Para ver isso, observe que o intervalo $(a, b]$ não é aberto nem fechado, pois contém apenas uma de suas extremidades. Se “aberto” e “fechado” fossem matematicamente opostos, então *cada* intervalo seria aberto ou fechado.

Conjuntos abertos vs. conjuntos fechados. Também é verdade que $(-\infty, \infty)$ é *tanto* aberto quanto fechado, mas uma explicação disso nos levaria muito longe.

Os matemáticos aprenderam a ser extremamente cuidadosos com esse tipo de coisa. No caso de convergência e divergência de uma série, mesmo que essas palavras sejam, na verdade, opostas matematicamente (toda sequência converge ou diverge e nenhuma sequência converge, e diverge) é melhor dizer isso explicitamente para que não haja confusão.

Uma sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ só pode convergir para um número real, a , de uma maneira: aproximando-se arbitrariamente de a . No entanto, existem várias maneiras pelas quais uma sequência pode divergir.

Exemplo 7.33 Considere a sequência, $(n)_{n=1}^{\infty}$. Isso diverge claramente ao ficar cada vez maior. . . Ops! Vamos ter cuidado. A sequência $(1 - \frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ também fica cada vez maior, mas converge. O que queríamos dizer é que os termos da sequência $(n)_{n=1}^{\infty}$ tornam-se *arbitrariamente* grandes à medida que n aumenta.

Esta é claramente uma sequência divergente, mas pode não estar claro como prová-la formalmente. Aqui está uma maneira.

Para demonstrar a divergência, devemos mostrar que a sequência satisfaz a *negação* da definição de convergência. Ou seja, devemos mostrar que para todo $r \in \mathbb{R}$ existe um $\varepsilon > 0$ tal que para cada $N \in \mathbb{R}$, existe um $n > N$ com $|n - r| \geq \varepsilon$.

Portanto, seja $\varepsilon = 1$, e seja $r \in \mathbb{R}$ dado. Seja $N = r + 2$. Então, para cada $n > N$ $|n - r| > |(r + 2) - r| = 2 > 1$. Portanto a sequência diverge. $\square$

Isso parece ter dado mais trabalho do que deveríamos para resolver um problema tão simples. Aqui está outra maneira que destaca esse tipo específico de divergência.

Primeiro, precisaremos de uma nova definição:

Definição 7.34 Uma sequência, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, **diverge para infinito positivo** se para cada número real r , existe um número real N tal que infinito! Divergência $n > N \Rightarrow a_n > r$.

Uma sequência, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, **diverge para o infinito negativo** se para cada número real r , existe um número real N tal que $n > N \Rightarrow a_n < r$.

Diz-se que uma sequência **divergir para o infinito** se divergir para o infinito positivo ou negativo. $\diamond$

Na prática, queremos pensar em $|r|$ como um número muito grande. Esta definição diz que uma sequência diverge para o infinito se se tornar arbitrari-

amente grande como n aumenta, e similarmente para divergência ao infinito negativo.

Problema 7.35 Mostre que $(n)_{n=1}^{\infty}$ diverge para o infinito. $\square$

Problema 7.36 Mostre que se $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ diverge para o infinito então $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ diverge. $\square$

Denotamos a divergência ao infinito como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty.$$

No entanto, a rigor, isso é um abuso de notação, já que o símbolo ∞ não representa um número real. Essa notação pode ser muito problemática, pois se parece muito com a notação que usamos para denotar convergência: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

No entanto, a notação é apropriada porque a divergência ao infinito é uma divergência “boa” no sentido de que compartilha muitas das propriedades da convergência, como mostra o próximo problema.

Problema 7.37 Suponha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

- (a) Mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \infty$
- (b) Mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$
- (c) É verdade que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$? Explicar.

$\square$

Como a divergência para o infinito positivo ou negativo compartilha algumas das propriedades da convergência, é fácil ser descuidado com ela. Lembre-se de que, mesmo que escrevamos $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ esta ainda é uma sequência divergente no sentido de que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ não existe. O símbolo ∞ não representa um número real. Esta é apenas uma abreviação de notação conveniente que nos diz que a sequência diverge ao se tornar arbitrariamente grande.

Problema 7.38 Suponha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Prove ou dê um contra-exemplo:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \infty$
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = -\infty$
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha a_n = \infty$
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha b_n = -\infty$

$\square$

Por fim, uma sequência pode divergir de outras maneiras, como mostra o problema a seguir.

Problema 7.39 Mostre que cada uma das seguintes sequências diverge.

- (a) $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$
- (b) $((-1)^n n)_{n=1}^{\infty}$
- (c) $a_n = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 2^p \text{ para alguns } p \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{n} & \text{de outra forma.} \end{cases}$

□

Problema 7.40 Suponha que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ diverge, mas não ao infinito e que α é um número real. Quais condições em α garantirão que:

(a) $(\alpha a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge?

(b) $(\alpha a_n)_{n=1}^{\infty}$ diverge?

□

Problema 7.41 Mostre que se $|r| > 1$ então $(r^n)_{n=1}^{\infty}$ diverge. Irá divergir para o infinito? □

7.4 Problemas adicionais

Problema 7.42 Prove que se $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n| = |s|$. Prove que o inverso é verdadeiro quando $s = 0$, mas não é necessariamente verdadeiro caso contrário. □

Problema 7.43

(a) Seja (s_n) e (t_n) ser sequências com $s_n \leq t_n, \forall n$. Suponha $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$.

Prove $s \leq t$.

Dica. Suponha, por contradição, que $s > t$ e use a definição de convergência com $\varepsilon = \frac{s-t}{2}$ para produzir um n com $s_n > t_n$.

(b) Prove que se uma sequência converge, então seu limite é único. Ou seja, prove que se $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = t$, então $s = t$.

□

Problema 7.44 Prove que se a sequência (s_n) for limitada então $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{s_n}{n}\right) = 0$. □

Problema 7.45

(a) Prove que se $x \neq 1$, então

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

(b) Use (a) para provar que se $|x| < 1$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^n x^j\right) = \frac{1}{1-x}$.

□

Problema 7.46 Prove

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_k n^k}{b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + \cdots + b_k n^k} = \frac{a_k}{b_k},$$

desde que $b_k \neq 0$. [Observe que, como um polinômio tem apenas um número finito de raízes, o denominador será diferente de zero quando n for suficientemente grande.] □

Problema 7.47 Prove que se $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - t_n) = 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = s$. □

Problema 7.48

- (a) Prove que se $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ e $s < t$, então existe um número real N tal que se $n > N$ então $s_n < t$.
- (b) Prove que se $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ e $r < s$, então existe um número real M tal que se $n > M$ então $r < s_n$.

□

Problema 7.49 Suponha (s_n) é uma sequência de números positivos tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{s_{n+1}}{s_n} \right) = L.$$

- (a) Prove que se $L < 1$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$.

Dica. Escolha R com $L < R < 1$. Pelo problema anterior, $\exists N$ de modo que se $n > N$, então $\frac{s_{n+1}}{s_n} < R$. Seja $n_0 > N$ ser corrigido e mostrar $s_{n_0+k} < R^k s_{n_0}$. Conclua que $\lim_{k \rightarrow \infty} s_{n_0+k} = 0$ e deixe $n = n_0 + k$.

- (b) Seja c um número real positivo. Prove $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{c^n}{n!} \right) = 0$.

□

Capítulo 8

Um “Contaylor” de três res- tos

8.1 A Forma Integral do Resto

Agora que temos uma definição rigorosa da convergência de uma sequência, vamos aplicar isso às séries de Taylor. Lembre-se de que a série de Taylor de uma função $f(x)$ expandida em torno do ponto a é dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots$$

Quando dizemos que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ para um determinado valor de x , o que queremos dizer é que a sequência das somas parciais

$$\left(\sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j \right)_{n=0}^{\infty} \\ = \left(f(a), f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a), f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2, \dots \right)$$

converge para o número $f(x)$. Note que o índice na somatória foi alterado para j permitindo que n represente o índice da sequência das somas parciais. Por mais intimidador que isso possa parecer, lembre-se de que, para um número real fixo x , isso ainda é uma sequência de números reais. Assim, dizer que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ significa que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j \right) = f(x)$ e no capítulo anterior desenvolvemos algumas ferramentas para examinar esse fenômeno. Em particular, sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j \right) = f(x)$ é equivalente a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[f(x) - \left(\sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j \right) \right] = 0.$$

Já vimos um exemplo disso anteriormente. [Problema 7.45](#) do último capítulo, basicamente você mostrou que a série geométrica, $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ converge

para $\frac{1}{1-x}$, for $|x| < 1$ mostrando que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1-x} - \left(\sum_{j=0}^n x^j \right) \right] = 0$.

Geralmente, não existe uma forma fechada facilmente reconhecível para a soma parcial de uma série de Taylor. A série geométrica é um caso especial. Felizmente, para o que estamos tratando (a convergência de uma série de Taylor), não precisamos analisar a série em si. O que precisamos mostrar é que a diferença entre a função e a n -ésima soma parcial converge para zero. Essa diferença é chamada de **resto (da série de Taylor)**. (Por quê?)

Embora seja verdade que o resto é simplesmente

$$f(x) - \left(\sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j \right),$$

Essa forma não é fácil de trabalhar. Felizmente, várias versões alternativas desse resto estão disponíveis. Vamos explorar essas versões neste capítulo.

Lembre-se do resultado de [Theorem 5.9](#) from [Chapter 5](#),

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!} \int_{t=a}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Podemos usar isso reescrevendo-o como

$$f(x) - \left(\sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j \right) = \frac{1}{n!} \int_{t=a}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

A Expressão $\frac{1}{n!} \int_{t=a}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$ é chamada de *forma integral do resto para a série de Taylor* de $f(x)$, e a série de Taylor irá convergir para $f(x)$ exatamente quando a sequência $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n!} \int_{t=a}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \right)$ converge para zero. Acontece que essa forma do resto é frequentemente mais fácil de lidar do que a expressão original $f(x) - \left(\sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j \right)$ e podemos usá-la para obter alguns resultados gerais.

Teorema 8.1 *Série de Taylor*

Se existe um número real B tal que $|f^{(n+1)}(t)| \leq B$ para todos os inteiros não negativos n e para todo t em um intervalo que contém a e x , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n!} \int_{t=a}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \right) = 0$$

Portanto

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Para provar isso, pode ser útil primeiro provar o seguinte.

Lema 8.2 Se f e $|f|$ são funções integráveis e $a \leq b$, então

$$\left| \int_{t=a}^b f(t) dt \right| \leq \int_{t=a}^b |f(t)| dt.$$

Problema 8.3 Prove o [Lema 8.2](#).

Dica. $-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$. □

Problema 8.4 Prove o [Teorema 8.1](#).

Dica. Você pode querer usar o [Problema 7.49](#) do [Capítulo 7](#). Além disso, há dois casos a serem considerados: $a < x$ e $x < a$ (o caso $x = a$ é trivial).

Você descobrirá que isso é verdade em geral. É por isso que frequentemente indicaremos que t está entre a e x como no teorema. No caso de $x < a$, observe que

$$\begin{aligned} \left| \int_{t=a}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \right| &= \left| (-1)^{n+1} \int_{t=x}^a f^{(n+1)}(t)(t-x)^n dt \right| \\ &= \left| \int_{t=x}^a f^{(n+1)}(t)(t-x)^n dt \right|. \end{aligned}$$

□

Problema 8.5 Use [Teorema 8.1](#) Para provar que para qualquer número real x

$$(a) \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$(b) \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$(c) e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

□

[Problema 8.5.c](#) mostra que a série de Taylor de e^x expandida em torno de zero converge para e^x para qualquer número real x . [Teorema 8.1](#) pode ser usado de maneira semelhante para mostrar que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a (x-a)^n}{n!}$$

para quaisquer números reais a e x .

Lembre-se que Chapter ?? mostramos que, se definirmos a função $E(x)$ pela séries de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ então $E(x+y) = E(x)E(y)$. Isso, claro, é apenas a conhecida propriedade de adição dos expoentes inteiros estendida a qualquer número real. No Chapter ?? tivemos que assumir *assumir* that defining $E(x)$ como uma série era significativa, pois não tratamos da convergência da série naquele capítulo. Agora que sabemos que a série converge para qualquer número real, vemos que a definição

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

é de fato válida.

Assumindo que podemos diferenciar essa série termo a termo, é simples mostrar que $f'(x) = f(x)$.

Podemos, mas essa prova terá que esperar alguns capítulos.

Juntamente com a fórmula de Taylor, isso pode ser usado para mostrar que $e^{a+b} = e^a e^b$ de maneira mais elegante do que a prova um tanto trabalhosa na equação [equation \(I.6\)](#), como mostra o seguinte problema.

Problema 8.6 Lembre-se de que, se $f(x) = e^x$ então $f'(x) = e^x$. Use isso juntamente com a expansão em série de Taylor de e^x em torno de a para mostrar que

$$e^{a+b} = e^a e^b.$$

□

Teorema 8.1 É um bom “primeiro passo” em direção a uma teoria rigorosa da convergência de séries de Taylor, mas não é aplicável em todos os casos. Por exemplo, considere a função $f(x) = \sqrt{1+x}$. Como vimos no Chapter ??, **Problem 4.27**, a série de Maclaurin dessa função (a série binomial para $(1+x)^{1/2}$) parece estar convergindo para a função quando $x \in (-1, 1)$. Embora isso seja de fato verdade, a proposição acima não se aplica. Se considerarmos as derivadas de $f(t) = (1+t)^{1/2}$, obtemos:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}-1} \\ f''(t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) (1+t)^{\frac{1}{2}-2} \\ f'''(t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) (1+t)^{\frac{1}{2}-3} \\ &\vdots \\ f^{(n+1)}(t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \cdots \left(\frac{1}{2} - n \right) (1+t)^{\frac{1}{2}-(n+1)}. \end{aligned}$$

Note que

$$|f^{(n+1)}(0)| = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(2 - \frac{1}{2} \right) \cdots \left(n - \frac{1}{2} \right).$$

Como essa sequência cresce indefinidamente quando $n \rightarrow \infty$, não há chance de encontrarmos um número B que sirva como limite superior para todas as derivadas de f em qualquer intervalo que contenha 0 e x . Portanto, a hipótese do **Theorem 8.1** nunca será satisfeita.

Precisamos de um argumento mais sutil para provar que:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

é válida para $x \in (-1, 1)$. Para realizar essa tarefa, precisaremos expressar o resto da série de Taylor de uma forma diferente. Felizmente, existem pelo menos duas formas alternativas para isso.

8.2 Forma do Resto de Lagrange

Joseph-Louis Lagrange forneceu uma forma alternativa para o resto em séries de Taylor em sua obra de 1797 *Théorie des fonctions analytiques*. A forma do resto de Lagrange é a seguinte.

Teorema 8.7 *Forma do Resto de Lagrange*

Suponha f seja uma função tal que $f^{(n+1)}(t)$ seja contínua em um intervalo que contenha a e x . Então

$$f(x) - \left(\sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j \right) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

onde c é algum número entre a e x .

Proof. Note primeiro que o resultado é verdadeiro quando $x = a$ pois ambos os lados se reduzem a 0 (nesse caso $c = x = a$.) Vamos provar o caso em que $a < x$; o caso $x < a$ ficará como exercício.

Primeiramente, já temos que:

$$f(x) - \left(\sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j \right) = \frac{1}{n!} \int_{t=a}^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt$$

Portanto, basta mostrar que:

$$\int_{t=a}^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n+1} (x-a)^{n+1}$$

para algum c , $c \in [a, x]$. Para isso, definimos:

$$M = \max_{a \leq t \leq x} \left(f^{(n+1)}(t) \right)$$

e

$$m = \min_{a \leq t \leq x} \left(f^{(n+1)}(t) \right).$$

Note que, para todo $t \in [a, x]$, temos $m \leq f^{(n+1)}(t) \leq M$. Como $x-t \geq 0$, isso nos dá

$$m(x-t)^n \leq f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \leq M(x-t)^n \quad (\text{III.1})$$

obtemos

$$\int_{t=a}^x m(x-t)^n dt \leq \int_{t=a}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \leq \int_{t=a}^x M(x-t)^n dt. \quad (\text{III.2})$$

Calculando as integrais externas, temos:

$$\begin{aligned} m \int_{t=a}^x (x-t)^n dt &\leq \int_{t=a}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \leq M \int_{t=a}^x (x-t)^n dt \\ m \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} &\leq \int_{t=a}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \leq M \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \\ m &\leq \frac{\int_{t=a}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt}{\left(\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \right)} \leq M. \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Como

$$\frac{\int_{t=a}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt}{\left(\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \right)}$$

é um valor que está entre o máximo e o mínimo de $f^{(n+1)}$ no intervalo $[a, x]$, então, pelo Teorema do Valor Intermediário, deve existir um número $c \in [a, x]$ tal que

$$f^{(n+1)}(c) = \frac{\int_{t=a}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt}{\left(\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \right)}.$$

Isso nos dá

$$\int_{t=a}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n+1} (x-a)^{n+1}.$$

E assim, o resultado segue. ■

Problema 8.8 Prove Teorema 8.7 para o caso em que $x < a$.

Dica. Note que

$$\int_{t=a}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = (-1)^{n+1} \int_{t=x}^a f^{(n+1)}(t)(t-x)^n dt.$$

Use o mesmo argumento sobre essa integral. Vai funcionar no final — de verdade! Você só precisa acompanhar cuidadosamente *todos* os sinais negativos. $\square$

Observação: Está *not* é a demonstração de Lagrange. Ele não usou a forma integral do resto. No entanto, essa demonstração é semelhante à de Lagrange, pois ele também utilizou o Teorema do Valor Intermediário (TVI) e o Teorema do Valor Extremo (TVE) da mesma forma que nós fizemos. Na época de Lagrange, esses teoremas eram considerados obviamente verdadeiros para uma função contínua e nós seguimos o exemplo de Lagrange assumindo o TVI e o TVE. No entanto, em matemática, precisamos manter nossas suposições o mais simples e poucas possíveis. O TVI e o TVE não atendem a essa necessidade, pois ambos podem ser provados a partir de ideias mais simples. Voltaremos a isso no [Chapter 10](#).

Além disso, um aviso sobre isso: A forma do resto de Lagrange é $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, onde c é algum número entre a e x . A prova não indica qual é esse c e, na verdade, esse c muda conformen muda. Tudo o que sabemos é que esse c esta entre a e x . Para ilustrar essa questão e seus potenciais perigos, considere o seguinte problema, onde temos a oportunidade de calcular o valor de c para a função $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Problema 8.9 Este problema investiga a representação da série de Taylor para:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

- (a) Use o fato de que $\frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-x)^n$ para calcular o restante $\frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-x)^n)$. Especificamente, calcule esse restante quando $x = 1$ e conclua que a série de Taylor não converge para $\frac{1}{1+x}$ quando $x = 1$.
- (b) Compare o restante da parte (a) com a forma de Lagrange do restante para determinar qual é o valor de c quando $x = 1$.
- (c) Considere o seguinte argumento: Se $f(x) = \frac{1}{1+x}$, então

$$f^{(n+1)}(c) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(1+c)^{n+2}}$$

Portanto, a forma de Lagrange do restante quando $x = 1$ é dada por

$$\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(n+1)!(1+c)^{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1}}{(1+c)^{n+2}}$$

onde $c \in [0, 1]$. Pode-se ver na parte (b) que $c \neq 0$. Portanto $1+c > 1$, e assim, pela [Problema 7.7](#) do [Capítulo 7](#), o restante de Lagrange converge para 0 quando $n \rightarrow \infty$. Esse argumento sugeriria que a série de Taylor converge para $\frac{1}{1+x}$ quando $x = 1$. No entanto, sabemos pela parte (a) que isso está incorreto. O que está errado com o argumento?

$\square$

Embora haja perigos potenciais em usar indevidamente a forma de Lagrange do restante, ela é uma forma útil. Por exemplo, munidos da forma de Lagrange do restante, podemos provar o seguinte teorema.

Teorema 8.10 *As séries binominais*

$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + \dots$$

convergem para $\sqrt{1+x}$ para $x \in [0, 1]$.

Proof. Primeiramente, observe que a série binomial é, de fato, a série de Taylor da função $f(x) = \sqrt{1+x}$ expandida em torno de $a = 0$. Se fixarmos um valor de x com $0 \leq x \leq 1$, então basta mostrar que a forma de Lagrange do resto converge para 0. Com isso em mente, observe que

$$f^{(n+1)}(t) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}-1\right) \dots \left(\frac{1}{2}-n\right) (1+t)^{\frac{1}{2}-(n+1)}$$

e assim, a forma do resto de Lagrange é

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}-1\right) \dots \left(\frac{1}{2}-n\right)}{(n+1)!} \frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+\frac{1}{2}}}$$

onde c é algum número entre 0 e x . Como $0 \leq x \leq 1$ e $1+c \geq 1$, então temos que: $\frac{1}{1+c} \leq 1$, e, portanto

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}-1\right) \dots \left(\frac{1}{2}-n\right)}{(n+1)!} \frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+\frac{1}{2}}} \right| \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \left(1-\frac{1}{2}\right) \dots \left(n-\frac{1}{2}\right)}{(n+1)!} \frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{5}{2}\right) \dots \left(\frac{2n-1}{2}\right)}{(n+1)!} (x^{n+1}) \frac{1}{(1+c)^{n+\frac{1}{2}}} \\ &\leq \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^{n+1}(n+1)!} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n \cdot (2n+2)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{2n+2} \\ &\leq \frac{1}{2n+2}. \end{aligned}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+2} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} 0$, então, pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \right| = 0, \text{ então } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \right) = 0.$$

Assim, a série de Taylor

$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + \dots$$

converge para $\sqrt{1+x}$ para $0 \leq x \leq 1$. ■

Infelizmente, essa demonstração não funciona para $-1 < x < 0$. Nesse caso,

o fato de que $x \leq c \leq 0$ implica que $1 + c \leq 1$. Assim, temos $\frac{1}{1+c} \geq 1$, e por isso a desigualdade

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\cdots\left(\frac{2n-1}{2}\right)}{(n+1)!} \frac{|x|^{n+1}}{(1+c)^{n+\frac{1}{2}}} \leq \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2^{n+1}(n+1)!}$$

pode não ser válida.

Problema 8.11 Mostre que se $-\frac{1}{2} \leq x \leq c \leq 0$, então $|\frac{x}{1+c}| \leq 1$ e modifique a demonstração anterior para mostrar que a série binomial converge para $\sqrt{1+x}$ para $x \in [-\frac{1}{2}, 0]$. $\square$

Para lidar com o caso onde $-1 < x < -\frac{1}{2}$, usaremos outra forma do resto da série de Taylor. No entanto, antes de tratarmos disso, usaremos a forma de Lagrange do resto para abordar algo mencionado no [Capítulo 5](#). Lembre-se de que notamos que a representação da série

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

não funcionou quando $x = 1$, no entanto, notamos que a série obtida ao integrar termo a termo parecia convergir para a antiderivada de $\frac{1}{1+x}$. Especificamente, temos a série de Taylor

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots$$

Substituindo $x = 1$ nisso, obtemos a série convergente $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$. Fizemos a afirmação de que isso, de fato, converge para $\ln 2$, mas que isso não era óbvio. A forma de Lagrange do resto nos fornece a ferramenta para provar isso.

Problema 8.12

- (a) Calcule a forma de Lagrange do resto para a série de Maclaurin de $\ln(1+x)$.
- (b) Mostre que, quando $x = 1$, a forma de Lagrange do resto converge para 0 e, assim, a equação $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ é, de fato, correta.

$\square$

8.3 Forma de Cauchy do Resto

Em seu trabalho de 1823, *Résumé des leçons données á l'école royale polytechnique sur le calcul infinitésimal*, Augustin Cauchy forneceu outra forma do resto para as séries de Taylor.

Teorema 8.13 Forma de Cauchy do Resto

Suponha que f seja uma função tal que $f^{(n+1)}(t)$ is $\acute{E}$ contínua em um intervalo que contém a e x . Então,

$$f(x) - \left(\sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j \right) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-c)^n (x-a)$$

onde c é algum número entre a e x .

Problema 8.14 Prove [Theorem 8.13](#) usando um argumento semelhante ao utilizado na prova do [Theorem 8.7](#). Não se esqueça de que há dois casos a considerar. $\square$

Usando a forma de resto de Cauchy, podemos provar que a série binomial

$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + \dots$$

converge para $\sqrt{1+x}$ para $x \in (-1, 0)$.

Estritamente falando, só precisamos mostrar isso para $x \in (-1, -1/2)$. In [problema 8.11](#) cobrimos $x \in (-1/2, 0)$.

Com isso em mente, seja x um número fixado tal que $-1 < x < 0$ e considere que a série binomial é a série de Maclaurin para a função $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}$. Como vimos antes,

$$f^{(n+1)}(t) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}-1\right) \cdots \left(\frac{1}{2}-n\right) (1+t)^{\frac{1}{2}-(n+1)},$$

então, a forma de Cauchy do resto é dada por:

$$0 \leq \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-c)^n (x-0) \right| = \left| \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}-1\right) \cdots \left(\frac{1}{2}-n\right)}{n!} \frac{(x-c)^n}{(1+c)^{n+\frac{1}{2}}} \cdot x \right|$$

onde c é um número tal $x \leq c \leq 0$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}-1\right) \cdots \left(\frac{1}{2}-n\right)}{n!} \frac{(x-c)^n x}{(1+c)^{n+\frac{1}{2}}} \right| \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \left(1-\frac{1}{2}\right) \cdots \left(n-\frac{1}{2}\right)}{n!} \frac{|x-c|^n |x|}{(1+c)^{n+\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{5}{2}\right) \cdots \left(\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} \frac{(c-x)^n}{(1+c)^n} \frac{|x|}{\sqrt{1+c}} \\ &= \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+1} n!} \left(\frac{c-x}{1+c}\right)^n \frac{|x|}{\sqrt{1+c}} \\ &= \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \left(\frac{c-x}{1+c}\right)^n \frac{|x|}{\sqrt{1+c}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \left(\frac{c-x}{1+c}\right)^n \frac{|x|}{\sqrt{1+c}} \\ &\leq \left(\frac{c-x}{1+c}\right)^n \frac{|x|}{\sqrt{1+c}}. \end{aligned}$$

Observe que se $-1 < x \leq c$, então $0 < 1+x \leq 1+c$. Logo, temos: $0 < \frac{1}{1+c} \leq \frac{1}{1+x}$ e $\frac{1}{\sqrt{1+c}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Dessa forma, temos que

$$0 \leq \left| \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}-1\right) \cdots \left(\frac{1}{2}-n\right)}{n!} \frac{(x-c)^n x}{(1+c)^{n+\frac{1}{2}}} \right| \leq \left(\frac{c-x}{1+c}\right)^n \frac{|x|}{\sqrt{1+x}}.$$

Problema 8.15 Suponha $-1 < x \leq c \leq 0$ e considere a função $g(c) = \frac{c-x}{1+c}$. Mostre que em $[x, 0]$, g é crescente e use isso para concluir que, para $-1 < x \leq c \leq 0$,

$$\frac{c-x}{1+c} \leq |x|.$$

Use esse fato para concluir a prova de que a série binomial converge para $\sqrt{1+x}$ para $-1 < x < 0$. $\square$

As provas tanto da forma de Lagrange quanto a de Cauchy do resto para as séries de Taylor fizeram uso de dois fatos cruciais sobre funções contínuas.

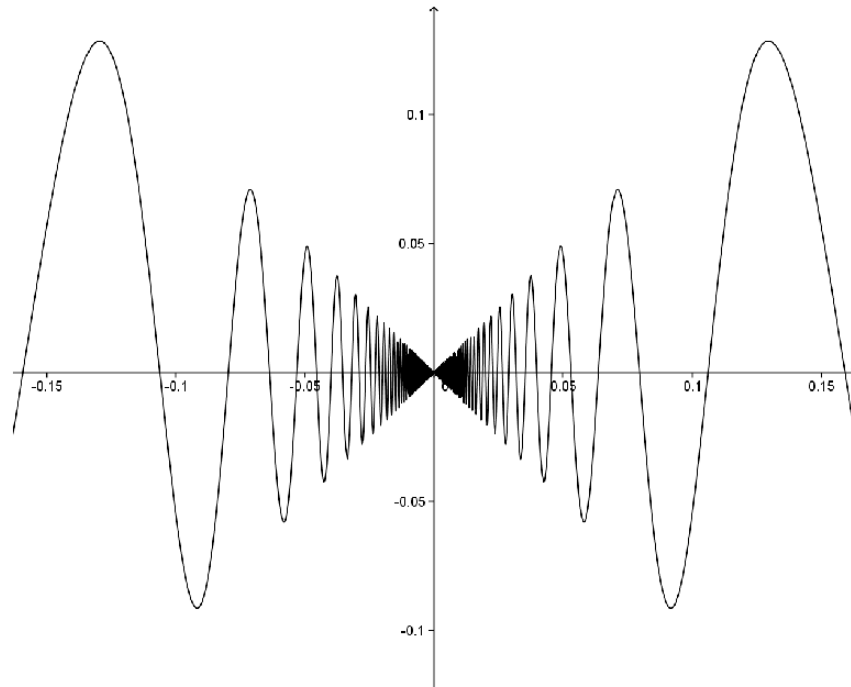
**Figure 8.16** Augustin Cauchy¹²

Primeiro, assumimos o Teorema do Valor Extremo: Qualquer função contínua em um intervalo fechado e limitado assume seu máximo e mínimo em algum ponto do intervalo. Em segundo lugar, assumimos que qualquer função contínua satisfaz o Teorema do Valor Intermediário: Se uma função contínua assume dois valores diferentes, ela deve assumir qualquer valor entre esses dois valores.

Matemáticos no final dos anos 1700 e início dos anos 1800 tipicamente consideravam esses fatos como intuitivamente óbvios. Isso era natural, pois nossa compreensão de continuidade na época era, exclusivamente, intuitiva. A intuição é uma ferramenta útil, mas como vimos antes, também pode ser falível. Por exemplo, considere a seguinte função.

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{if } x \neq 0, \\ 0, & \text{if } x = 0. \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

Esta função é contínua em 0? Perto de zero, seu gráfico se parece com isso:

**Figure 8.17** Formula (III.4) perto de 0.

¹⁴mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cauchy/

Mas esse gráfico deve ser analisado com cautela, pois $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ oscila infinitamente à medida que x se aproxima de zero.

Independentemente do que você possa supor, é claro que é difícil analisar tal função com apenas uma noção intuitiva de continuidade. Vamos revisar esse exemplo no próximo capítulo.

Assim como a convergência, a continuidade é mais sutil do que parece à primeira vista.

Nós colocamos a convergência em uma base sólida ao fornecer uma definição completamente analítica no capítulo anterior. O que precisamos fazer no próximo capítulo é fornecer uma definição totalmente rigorosa de continuidade.

8.4 Problemas adicionais

Problema 8.18 Encontre a forma integral, a forma de Lagrange e a forma de Cauchy do resto para as séries de Taylor das seguintes funções expandidas em torno dos valores de a .

(a) $f(x) = e^x$, $a = 0$

(b) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$

(c) $f(x) = (1+x)^\alpha$, $a = 0$

(d) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 3$

(e) $f(x) = \ln x$, $a = 2$

(f) $f(x) = \cos x$, $a = \frac{\pi}{2}$

□

Capítulo 9

Continuidade: o que não é e o que é

9.1 Uma definição analítica de continuidade

Antes da invenção do cálculo, a noção de continuidade era tratada intuitivamente, se é que era tratada. À primeira vista, parece uma ideia muito simples, baseada solidamente em nossa experiência do mundo real. Parados na margem, vemos um rio fluir por nós continuamente, sem pequenos solavancos. Mesmo quando o fluxo pode parecer descontínuo à primeira vista, como quando cai precipitadamente de um penhasco, um exame mais atento mostra que realmente não é. À medida que a água se aproxima do penhasco, ela acelera. Quando finalmente o ultrapassa, acelera muito rapidamente, mas não importa quão rápido vá, ela se move continuamente, movendo-se daqui para lá, ocupando todos os pontos intermediários. Isso é movimento contínuo. Ele nunca desaparece ali e reaparece instantaneamente aqui. Isso seria movimento descontínuo.

Da mesma forma, uma pedra atirada voa continuamente (e suavemente) do ponto de lançamento ao ponto de aterrissagem, passando por cada ponto em seu caminho.

Mas espere.

Se a pedra passa por pontos discretos, ela deve estar fazendo isso por meio de pequenos solavancos, não é mesmo? Caso contrário, como ela iria de um ponto a outro? É possível que o movimento no mundo real, assim como o movimento em um filme, seja composto de pequenos solavancos de um ponto a outro, mas que esses pequenos solavancos sejam simplesmente pequenos e rápidos demais para nossos sentidos detectarem?

Se assim for, então o mundo real é mais parecido com a reta numérica racional($\mathbb{Q}$) de [Capítulo 3](#) do que a reta numérica real ($\mathbb{R}$). Nesse caso, o movimento consiste realmente em saltar discretamente sobre a pontos “faltando” (como $\sqrt{2}$) à medida que avançamos daqui para lá. Isso pode parecer uma ideia bizarra para você — Para nós também, — mas a ideia de movimento contínuo é igualmente bizarra. Só é um pouco mais difícil entender o porquê.

O mundo real será o que é, independentemente do que acreditamos que seja, mas felizmente na matemática estamos *não* constrangidos a viver nele. Então, nem vamos tentar. Simplesmente postulamos que tal instabilidade não existe; que todo movimento é contínuo.

No entanto, nós *somos* obrigados a conviver com as consequências lógicas de nossas suposições, uma vez feitas. Elas nos levarão a águas realmente muito profundas.

O tratamento intuitivo da continuidade foi mantido ao longo do século XVIII, pois não se percebia, de modo geral, a necessidade de uma definição verdadeiramente rigorosa. Considere a seguinte definição dada por Euler em 1748.

Uma curva contínua é aquela cuja natureza pode ser expressa por uma única função dez . Se uma curva é de tal natureza que para suas várias partes... diferentes funções de x são necessárias para sua expressão, . . . , então chamamos essa curva de descontínua.

No entanto, as complexidades associadas às séries de Fourier e aos tipos de funções que elas representavam causaram aos matemáticos do início 1800s para repensar suas noções de continuidade. Como vimos em Parte ??, o gráfico da função definida pela série de Fourier

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \cos((2k+1)\pi x)$$

ficava assim:

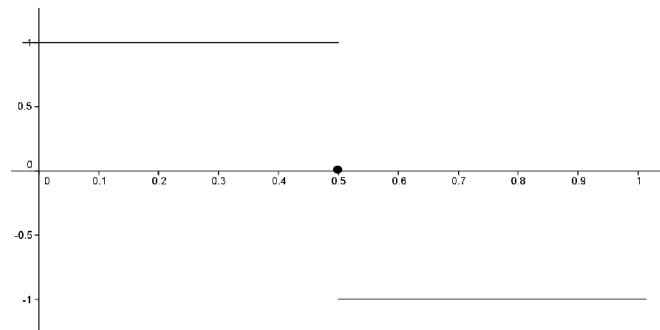


Figure 9.1

Essa função ia contra a noção de Euler sobre o que uma função contínua deveria ser. Aqui, uma soma infinita de curvas cosseno contínuas fornecia uma única expressão que resultava em uma curva “descontínua”. Mas, como vimos, isso não acontecia com séries de potências e uma noção intuitiva de continuidade é inadequada para explicar a diferença. Ainda mais perplexa é a seguinte situação. Intuitivamente, alguém pensaria que uma curva contínua deveria ter uma reta tangente em pelo menos um ponto. Ela pode ter vários pontos irregulares, mas deveria ser “suave” em algum lugar. Um exemplo disso seria $f(x) = x^{2/3}$. Seu gráfico é dado por

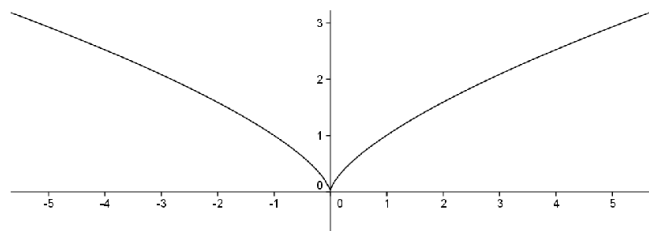


Figure 9.2

Essa função não é derivável na origem, mas é derivável em todo o restante. Certamente poderíamos criar exemplos de funções que não são deriváveis em qualquer quantidade de pontos, mas, intuitivamente, seria razoável



Figure 9.3 Karl Weierstrass¹³

esperar que uma função contínua deveria ser derivável *em algum lugar*. Podemos então conjecturar o seguinte:

Conjectura 9.4 *Se f é contínua em um intervalo I , então existe algum $a \in I$ tal que $f'(a)$ existe.*

Surpreendentemente, em 1872, Karl Weierstrass mostrou que a conjectura acima é **FALSA**. Ele fez isso exibindo o contraexemplo:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x).$$

Weierstrass mostrou que se a é um inteiro ímpar, $b \in (0, 1)$, e $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, então f é contínua em todo lugar, mas não é derivável em lugar nenhum. Tal função é, de certa forma, “fractal” por natureza, e fica claro que uma definição de continuidade baseada na intuição é inadequada para estudá-la.

Problema 9.5

- (a) Dado $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(a^n \pi x)$, qual é o menor valor de a para que f satisfaça o critério de Weierstrass para ser contínua e não derivável em nenhum ponto?
- (b) Seja $f(x, N) = \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(13^n \pi x)$ e use um software de álgebra computacional para plotar $f(x, N)$ para $N = 0, 1, 2, 3, 4, 10$ e $x \in [0, 1]$.
- (c) Plote $f(x, 10)$ para $x \in [0, c]$, onde $c = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001$. Com base no que você observa nas partes b e c, por que descreveríamos essa função como sendo, de certa forma, “fractal” por natureza?

□

Assim como foi importante definir convergência com uma definição rigorosa, sem apelar à intuição ou a representações geométricas, é imprescindível que definamos continuidade de forma rigorosa, sem depender de gráficos.

A primeira definição de continuidade que não dependia de geometria ou intuição foi dada em 1817 por Bernhard Bolzano em um artigo publicado nos Anais da Sociedade Científica de Praga, intitulado *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewahren, wenigstens eine reele Wurzel der Gleichung liege* (Prova puramente analítica do teorema de que entre quaisquer dois valores que fornecem resultados de sinais opostos existe pelo menos uma raiz real da equação).

¹³mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Weierstrass/



Figure 9.6 Bernhard Bolzano¹⁴

Pelo título, deve estar claro que neste artigo Bolzano está provando o Teorema do Valor Intermediário. Para isso, ele precisa de uma definição completamente analítica de continuidade. A essência da ideia de Bolzano é que, se f é contínua em um ponto a , então $f(x)$ deve estar “próximo” de $f(a)$ sempre que x estiver “próximo o suficiente” de a . Mais precisamente, Bolzano afirmou que f é contínua em a se $|f(x) - f(a)|$ puder ser tornado menor que qualquer quantidade dada, desde que façamos $|x - a|$ suficientemente pequeno.

A linguagem que Bolzano utiliza é muito semelhante à linguagem que Leibniz usava quando postulava a existência de números infinitesimais. Leibniz dizia que infinitesimais são “menores que qualquer quantidade dada, mas não zero”. Bolzano diz que “ $|f(x) - f(a)|$ pode ser tornado menor que qualquer quantidade dada, desde que façamos $|x - a|$ suficientemente pequeno.” Mas Bolzano para antes de afirmar que $|x - a|$ é *infinitesimalmente* pequeno. Dado a , podemos escolher x de forma que $|x - a|$ seja menor que qualquer número real que possamos nomear, digamos b , desde que nomeemos b antes, mas para qualquer escolha dada de x , $|x - a|$ e b ainda são ambos números reais. Possivelmente números reais muito pequenos, é verdade, mas ainda assim números reais. Infinitesimais não têm lugar na construção de Bolzano.

O artigo de Bolzano não era muito conhecido quando Cauchy propôs uma definição semelhante em seu *Cours d'analyse* [1] de 1821, por isso geralmente Cauchy é quem recebe o crédito por essa definição, mas mesmo a definição de Cauchy não é suficientemente rigorosa para os padrões modernos. Foi Karl Weierstrass, em 1859, quem finalmente forneceu a definição moderna.

Definição 9.7 Dizemos que uma função f é contínua em a se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, se $|x - a| < \delta$, então $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. $\diamond$

Perceba que a definição de continuidade de uma função é feita ponto a ponto. Uma função pode certamente ser contínua em alguns pontos e descontínua em outros. Quando dizemos que f é contínua em um intervalo, queremos dizer que ela é contínua em cada ponto desse intervalo e, em teoria, precisaríamos usar a definição acima para verificar a continuidade em cada ponto individualmente.

Nossa definição é adequada no sentido de que não depende nem da intuição nem de gráficos, mas é justamente essa falta de apelo intuitivo que a torna difícil de compreender. Geralmente leva algum tempo para se sentir confortável com essa definição, quanto mais usá-la para provar teoremas como o Teorema do Valor Extremo e o Teorema do Valor Intermediário. Portanto, vamos com calma para desenvolver uma boa compreensão dela.

Essa definição estabelece um procedimento totalmente claro e objetivo: você me dá um número positivo ε , e eu devo ser capaz de encontrar um número

¹⁴mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bolzano/

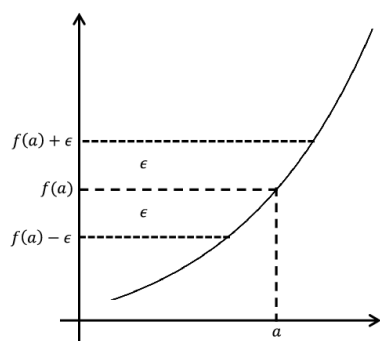
positivo δ que satisfaça uma certa propriedade. Se eu sempre conseguir fazer isso, então a função é contínua no ponto em questão.

Essa definição também torna muito preciso o que queremos dizer quando afirmamos que $f(x)$ deve estar “próximo de” $f(a)$ sempre que x estiver “suficientemente próximo de” a . Por exemplo, intuitivamente sabemos que $f(x) = x^2$ deve ser contínua em $x = 2$. Isso significa que deveríamos ser capazes de fazer com que x^2 fique, digamos, dentro de $\varepsilon = 0,1$ de 4, desde que façamos x suficientemente próximo de 2. Especificamente, queremos que $3,9 < x^2 < 4,1$. Isso acontece exatamente quando $\sqrt{3,9} < x < \sqrt{4,1}$. Usando o fato de que $\sqrt{3,9} < 1,98$ e $2,02 < \sqrt{4,1}$, podemos ver que, se fizermos x ficar dentro de $\delta = 0,02$ de 2, então $\sqrt{3,9} < 1,98 < x < 2,02 < \sqrt{4,1}$ e, portanto, x^2 estará dentro de 0,1 de 4. Isso é muito direto. O que torna essa situação mais difícil é que precisamos ser capazes de fazer isso para qualquer $\varepsilon > 0$.

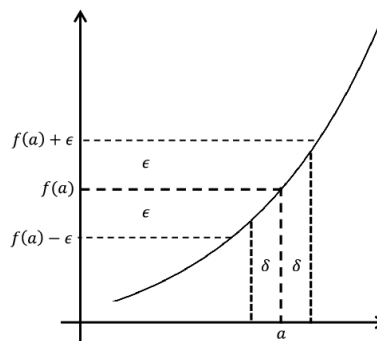
Note a semelhança entre esta definição e a definição de convergência de uma sequência. Ambas as definições possuem o desafio de um $\varepsilon > 0$. Na definição de $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, precisávamos fazer s_n ficar dentro de ε de s tornando n suficientemente grande. Para sequências, o desafio está em tornar $|s_n - s|$ suficientemente pequeno. Mais precisamente, dado $\varepsilon > 0$, precisamos decidir quão grande n deve ser para garantir que $|s_n - s| < \varepsilon$.

Na nossa definição de continuidade, ainda precisamos fazer algo ficar pequeno (nomeadamente $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$), só que desta vez, precisamos determinar quão próximo x deve estar de a para garantir que isso aconteça, em vez de determinar quão grande n deve ser.

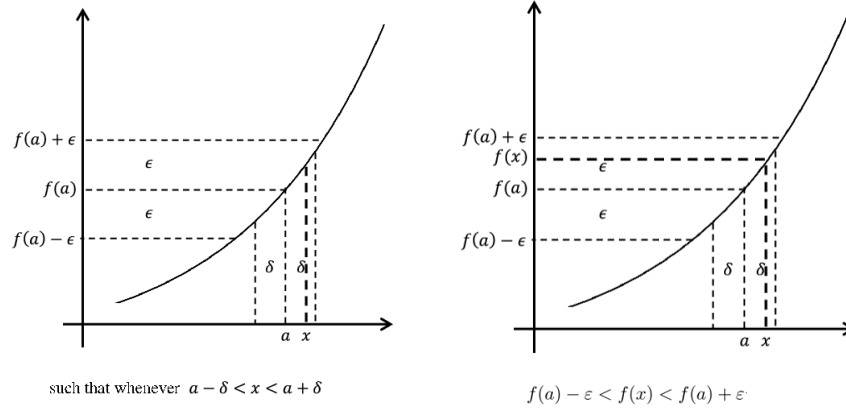
O que torna f contínua em a é a natureza arbitrária de ε (desde que seja positivo). À medida que ε se torna menor, isso força $f(x)$ a estar mais próximo de $f(a)$. O fato de que sempre podemos encontrar uma distância positiva δ para funcionar é o que queremos dizer quando afirmamos que podemos fazer $f(x)$ tão próximo de $f(a)$ quanto desejarmos, desde que tornemos x suficientemente próximo de a . A sequência de imagens abaixo ilustra que a frase “para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $|x - a| < \delta$ então $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ ” pode ser substituída pela formulação equivalente “para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $a - \delta < x < a + \delta$ então $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$.” Isso também poderia ser substituído pela frase “para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $x \in (a - \delta, a + \delta)$ então $f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$.” Todas essas formulações equivalentes transmitem a ideia de que podemos fazer $f(x)$ ficar dentro de ε de $f(a)$, desde que façamos x ficar dentro de δ de a , e usaremos qualquer formulação que atenda melhor às nossas necessidades em uma aplicação específica.



Given a distance ε away from $f(a)$



we must find a distance δ away from a



A precisão da definição é o que nos permite examinar a continuidade sem depender de figuras ou noções vagas como “proximidade” ou “aproximar-se”. Agora consideraremos alguns exemplos para ilustrar essa precisão.

Exemplo 9.8 Use a definição de continuidade para mostrar que $f(x) = x$ é contínua em qualquer ponto a . $\square$

Se desenhássemos o gráfico desta reta, provavelmente você diria que isso é óbvio. O objetivo da definição é que possamos fundamentar sua intuição de maneira rigorosa.

Proof. Seja $\varepsilon > 0$. Seja $\delta = \varepsilon$. Se $|x - a| < \delta$, então

$$|f(x) - f(a)| = |x - a| < \varepsilon$$

Assim, pela definição, f é contínua em a . $\blacksquare$

Problema 9.9 Use a definição de continuidade para mostrar que se m e b são números reais fixos (mas não especificados), então a função

$$f(x) = mx + b$$

é contínua em todo número real a . $\square$

Exemplo 9.10 Use a definição de continuidade para mostrar que $f(x) = x^2$ é contínua em $a = 0$. $\square$

Proof. Seja $\varepsilon > 0$. Seja $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Se $|x - 0| < \delta$, então $|x| < \sqrt{\varepsilon}$. Assim

$$|x^2 - 0^2| = |x|^2 < (\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon.$$

Assim, pela definição, f é contínua em 0. $\blacksquare$

Note que nestas provas, o desafio de um $\varepsilon > 0$ foi dado primeiro. Isso porque a escolha de δ deve depender de ε . Também note que não houve explicação para nossa escolha de δ . Nós simplesmente a fornecemos e mostramos que funcionava. Contanto que $\delta > 0$, isso é tudo que é necessário. De fato, o δ que escolhemos em cada exemplo não foi a única escolha que funcionou; qualquer δ menor também funcionaria.

Problema 9.11

- (a) Dado um $\varepsilon > 0$ particular na definição de continuidade, mostre que se um $\delta_0 > 0$ particular satisfaz a definição, então qualquer δ com $0 < \delta < \delta_0$ também funcionará para esse ε .
- (b) Mostre que se um δ pode ser encontrado para satisfazer as condições da definição de continuidade para um $\varepsilon_0 > 0$ particular, então esse δ também

funcionará para qualquer ε com $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$.

□

Não foi explicitamente declarado na definição, mas quando dizemos “se $|x - a| < \delta$ então $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$,” devemos estar nos restringindo a valores de x que estão no domínio da função f , caso contrário $f(x)$ não faz sentido. Não colocamos isso na definição porque essa definição já era complicada o suficiente sem essa tecnicidade. Além disso, nos exemplos acima, as funções estavam definidas para todo lugar, então isso era um ponto irrelevante. Continuaremos com a convenção de que quando dizemos “se $|x - a| < \delta$ então $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$,” estaremos nos restringindo a valores de x que estão no domínio da função f . Isso nos permitirá examinar a continuidade de funções não definidas para todo x sem precisar repetir essa restrição a cada vez.

Problema 9.12 Use a definição de continuidade para mostrar que

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

é contínua em $a = 0$.

□

Problema 9.13 Use a definição de continuidade para mostrar que $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua em $a = 0$. Como este problema é diferente do [problema 9.12](#)? Como é parecido?

□

Às vezes, o δ que vai funcionar para um determinado ε é bastante óbvio de se ver, especialmente depois que você já ganhou alguma experiência. Esse é o caso nos exemplos acima (pelo menos depois de rever as provas). No entanto, a tarefa de encontrar um δ que funcione geralmente não é tão óbvia e requer algum trabalho preliminar. Esse trabalho preliminar é vital para produzir um δ , mas, novamente, não faz parte da prova final e polida. Isso pode ser visto no exemplo a seguir.

Exemplo 9.14 Use a definição de continuidade para provar que $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua em $a = 1$.

TRABALHO PRELIMINAR

Como antes, o trabalho preliminar para esses problemas frequentemente consiste simplesmente em trabalhar de trás para frente. Especificamente, dado um $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar um $\delta > 0$ tal que $|\sqrt{x} - \sqrt{1}| < \varepsilon$, sempre que $|x - 1| < \delta$. Trabalhamos de trás para frente a partir do que queremos, mantendo em mente que podemos controlar o tamanho de $|x - 1|$.

$$|\sqrt{x} - \sqrt{1}| = \left| \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1} \right| = \frac{|x - 1|}{\sqrt{x} + 1} < |x - 1|.$$

Isto sugere que devemos tomar $\delta = \varepsilon$. Agora estamos prontos para a prova formal.

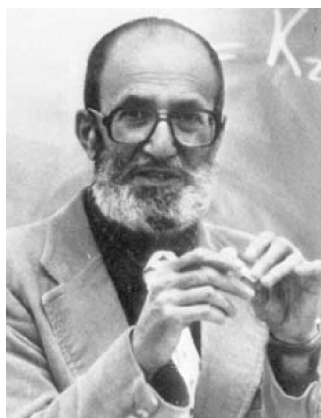
□

Proof. Seja $\varepsilon > 0$. Seja $\delta = \varepsilon$. Se $|x - 1| < \delta$, então $|x - 1| < \varepsilon$, e assim

$$|\sqrt{x} - \sqrt{1}| = \left| \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1} \right| = \frac{|x - 1|}{\sqrt{x} + 1} < |x - 1| < \varepsilon.$$

Assim, pela definição, $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua em 1.

■

**Figure 9.15** Paul Halmos¹⁵

Tenha em mente que alguém lendo a prova formal não terá visto o trabalho preliminar, então a escolha do δ pode parecer um tanto misteriosa. Contudo, você não está de forma alguma obrigado a motivar essa escolha de δ e, geralmente, não deve, a menos que seja necessário para a prova formal. Tudo o que você precisa fazer é encontrar esse δ e mostrar que ele funciona. Além disso, para um leitor experiente, suas ideias ficarão claras quando você demonstrar que a escolha de δ funciona.

Agora inverta essa última afirmação. *Como* um leitor experiente, quando você lê a prova de um teorema, é *sua* responsabilidade encontrar o trabalho preliminar, entender como a prova funciona e compreendê-la completamente. Como disse o renomado expositor matemático Paul Halmos (1916-2006), “Não apenas leia; lute contra ela! Faça suas próprias perguntas, procure seus próprios exemplos, descubra suas próprias provas. A hipótese é necessária? O recíproco é verdadeiro? O que acontece no caso clássico especial? E quanto aos casos degenerados? Onde a prova usa a hipótese?”

Esta é a maneira de aprender matemática. É realmente a única forma.

Problema 9.16 Use a definição de continuidade para mostrar que $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua em qualquer número real positivo a . $\square$

Problema 9.17

- (a) Use um círculo unitário para mostrar que para $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, $\sin \theta \leq \theta$ e $1 - \cos \theta \leq \theta$ e conclua que $|\sin \theta| \leq |\theta|$ e $|1 - \cos \theta| \leq |\theta|$ para $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.
- (b) Use a definição de continuidade para provar que $f(x) = \sin x$ é contínua em qualquer ponto a .

Dica. $\sin x = \sin(x - a + a)$.

$\square$

Problema 9.18

- (a) Use a definição de continuidade para mostrar que $f(x) = e^x$ é contínua em $a = 0$.
- (b) Mostre que $f(x) = e^x$ é contínua em qualquer ponto a .

Dica. Reescreva $e^x - e^a$ como $e^{a+(x-a)} - e^a$ e use o que você provou na parte a.

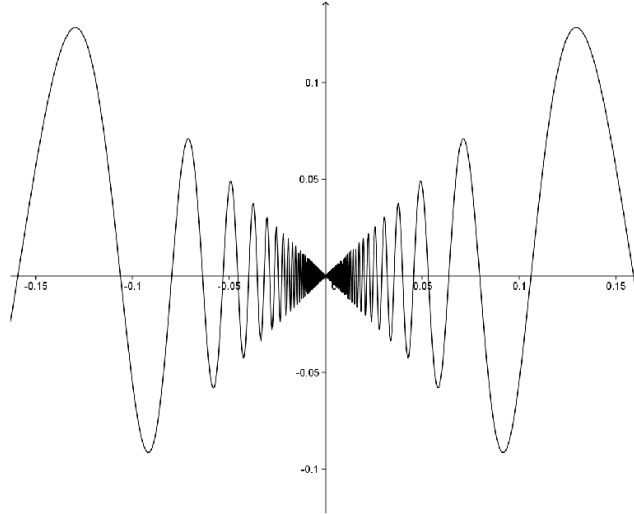
$\square$

¹⁵mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Halmos/

Nos problemas acima, usamos a definição de continuidade para verificar nossa intuição sobre a continuidade de funções familiares. A vantagem dessa definição analítica é que ela pode ser aplicada quando a função não é tão intuitiva. Considere, por exemplo, a função dada no final do capítulo anterior.

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Perto de zero, o gráfico de $f(x)$ se parece com isto:



Como mencionamos no capítulo anterior, já que $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ oscila infinitamente à medida que x se aproxima de zero, esse gráfico deve ser visto com certa suspeita. Porém, nossa definição completamente analítica de continuidade mostra que essa função é, de fato, contínua em 0.

Problema 9.19 A função seno do topólogo. Use a definição de continuidade para mostrar que

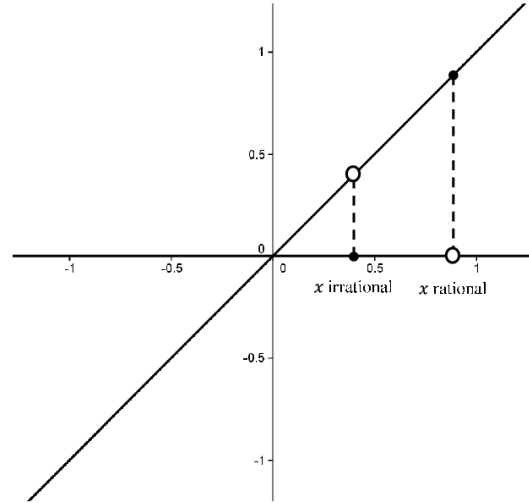
$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua em 0. □

Ainda mais intrigante é a função definida por

$$D(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0, & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}.$$

A olho nu, o gráfico dessa função parece as retas $y = 0$ e $y = x$. Claro que tal gráfico não seria o gráfico de uma função. Na verdade, ambas essas retas têm “buracos”. Onde há um ponto em uma reta, há um “buraco” na outra. Cada um desses buracos tem a largura de um único ponto (ou seja, sua “largura” é zero!), portanto são invisíveis a olho nu (ou mesmo ampliados sob o microscópio mais potente disponível). Essa ideia está ilustrada no gráfico a seguir



Será que uma função tão “cheia de buracos” pode ser contínua em algum ponto? Acontece que podemos usar nossa definição para mostrar que essa função é, de fato, contínua em 0 e em nenhum outro ponto.

Problema 9.20

- (a) Use a definição de continuidade para mostrar que a função

$$D(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0, & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

é contínua em 0.

- (b) Seja $a \neq 0$. Use a definição de continuidade para mostrar que D não é contínua em a .

Dica. Você pode querer dividir em dois casos, onde a é racional ou irracional. Mostre que nenhuma escolha de $\delta > 0$ funcionará para $\varepsilon = |a|$. Note que o [Teorema 3.11](#) do [Capítulo 3](#) provavelmente ajudará aqui.

□

9.2 Sequências e Continuidade

Há uma forma alternativa de provar que a função

$$D(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0, & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

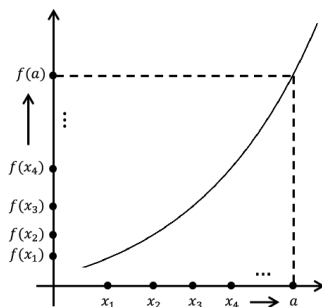
não é contínua em $a \neq 0$. Vamos examinar isso analisando a relação entre nossas definições de convergência e continuidade. As duas ideias estão, na verdade, bastante conectadas, como ilustra o seguinte teorema muito útil.

Teorema 9.21 *A função f é contínua em a se e somente se f satisfaz a seguinte propriedade:*

$$\forall \text{ seqüências } (x_n), \text{ se } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ então } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a).$$

O [Teorema 9.21](#) diz que para f ser contínua, é necessário e suficiente que toda seqüência (x_n) que converge para a faça a seqüência $(f(x_n))$ convergir para $f(a)$.

Uma imagem dessa situação está abaixo, embora, como sempre, a prova formal não dependa do diagrama.



Este teorema é especialmente útil para mostrar que uma função f não é contínua em um ponto a ; basta apresentar uma sequência (x_n) convergindo para a tal que a sequência $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ não converge para $f(a)$. Vamos demonstrar essa ideia antes de provar o [Teorema 9.21](#).

Exemplo 9.22 Use o [Teorema 9.21](#) para provar que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

não é contínua em 0. □

Proof. Primeiro, observe que f pode ser escrita como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Para mostrar que f não é contínua em 0, tudo que precisamos fazer é construir uma única sequência (x_n) que converge para 0, mas para a qual a sequência $(f(x_n))$ não converge para $f(0) = 0$. Para uma função como essa, praticamente qualquer sequência serve, mas vamos usar $(\frac{1}{n})$, simplesmente por ser uma velha conhecida.

Temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, mas $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0 = f(0)$. Assim, pelo [Teorema 9.21](#), f não é contínua em 0. ■

Problema 9.23 Use o [Teorema 9.21](#) para mostrar que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ a, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

não é contínua em 0, qualquer que seja o valor de a . □

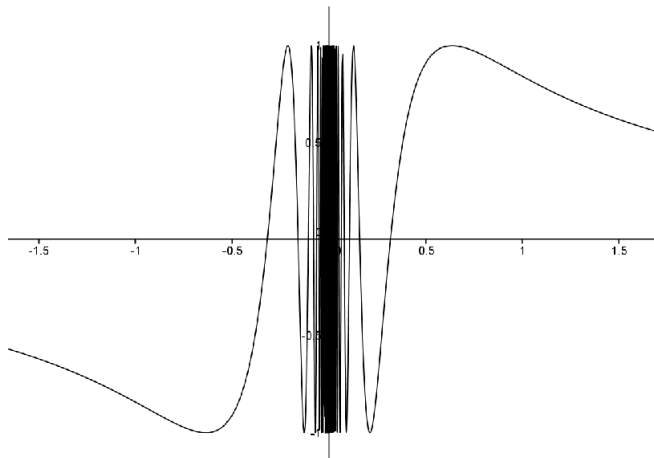
Problema 9.24 Use o [Teorema 9.21](#) para mostrar que

$$D(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0, & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

não é contínua em $a \neq 0$. □

Problema 9.25 A função $T(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ é frequentemente chamada de curva seno do topólogo. Enquanto $\sin x$ tem raízes em $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, e oscila

infinitamente conforme $x \rightarrow \pm\infty$, a função T tem raízes em $\frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, e oscila infinitamente conforme x se aproxima de zero. Uma representação gráfica segue.



Note que T não está definida em $x = 0$. Podemos estender T para ser definida em 0 simplesmente escolhendo um valor para $T(0)$:

$$T(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ b, & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Use [Teorema 9.21](#) para mostrar que T não é contínua em 0, não importa qual valor seja escolhido para b . $\square$

Esboço da Prova do Teorema 9.21. Vimos como podemos usar o [Teorema 9.21](#), agora precisamos provar o [Teorema 9.21](#). A direção direta é bastante simples. Assim, assumimos que f é contínua em a e começamos com uma sequência (x_n) que converge para a . O que resta mostrar é que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$. Se você escrever as definições de f ser contínua em a , $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$, você deverá ser capaz de ir do que está assumindo até o que deseja concluir.

Para provar o recíproco, é conveniente provar sua contrapositiva. Isto é, queremos provar que, se f não é contínua em a , então podemos construir uma sequência (x_n) que converge para a , mas $(f(x_n))$ não converge para $f(a)$. Primeiro, precisamos reconhecer o que significa que f não seja contínua em a . Isso diz que existe um $\varepsilon > 0$ tal que nenhuma escolha de $\delta > 0$ funcionará para isso. Ou seja, para qualquer δ , existirá um x tal que $|x - a| < \delta$, mas $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$. Com isso em mente, se $\delta = 1$, então existirá um x_1 tal que $|x_1 - a| < 1$, mas $|f(x_1) - f(a)| \geq \varepsilon$. De forma similar, se $\delta = \frac{1}{2}$, então existirá um x_2 tal que $|x_2 - a| < \frac{1}{2}$, mas $|f(x_2) - f(a)| \geq \varepsilon$. Se continuarmos dessa forma, criaremos uma sequência (x_n) tal que $|x_n - a| < \frac{1}{n}$, mas $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Isso deve resolver o problema. $\blacksquare$

Problema 9.26 Transforme as ideias dos dois parágrafos anteriores em uma prova formal do [Teorema 9.21](#). $\square$

O [Teorema 9.21](#) é um resultado muito útil. Ele é uma ponte entre as ideias de convergência e continuidade, permitindo que apliquemos toda a teoria que desenvolvemos no [Capítulo 7](#) às questões de continuidade. Por exemplo, considere o seguinte.

Teorema 9.27 Suponha que f e g sejam ambas contínuas em a . Então $f + g$ e $f \cdot g$ são contínuas em a .

Proof. Poderíamos usar a definição de continuidade para provar o Teorema 9.27, mas o Teorema 9.21 torna nosso trabalho muito mais fácil. Por exemplo, para mostrar que $f + g$ é contínua, considere qualquer sequência (x_n) que converge para a . Como f é contínua em a , então, pelo Teorema 9.21, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$. Da mesma forma, como g é contínua em a , então $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(a)$.

Pelo Teorema 7.18 do Capítulo 7,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (f + g)(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) + g(x_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \\ &= f(a) + g(a) \\ &= (f + g)(a). \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 9.21, $f + g$ é contínua em a . A prova de que $f \cdot g$ é contínua em a é similar. ■

Problema 9.28 Use o Teorema 9.21 para mostrar que, se f e g são contínuas em a , então $f \cdot g$ é contínua em a . □

Empregando o Teorema 9.27 um número finito de vezes, podemos ver que uma soma finita de funções contínuas é contínua. Ou seja, se $f_1, f_2, \dots, f_n$ são todas contínuas em a , então $\sum_{j=1}^n f_j$ é contínua em a . Mas e quanto a uma soma infinita? Especificamente, suponha que $f_1, f_2, f_3, \dots$ sejam todas contínuas em a . Considere o seguinte argumento.

Seja $\varepsilon > 0$. Como f_j é contínua em a , então existe $\delta_j > 0$ tal que se $|x - a| < \delta_j$, então $|f_j(x) - f_j(a)| < \frac{\varepsilon}{2^j}$. Seja $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \dots)$. Se $|x - a| < \delta$, então

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) - \sum_{j=1}^{\infty} f_j(a) \right| &= \left| \sum_{j=1}^{\infty} (f_j(x) - f_j(a)) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x) - f_j(a)| < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, por definição, $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ é contínua em a .

Esse argumento parece dizer que uma soma infinita de funções contínuas deve ser contínua (desde que ela convirja). No entanto, sabemos que a série de Fourier

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \cos((2k+1)\pi x)$$

é um contraexemplo a isso, pois é uma soma infinita de funções contínuas que não converge para uma função contínua. Algo fundamental parece ter dado errado aqui. Você pode dizer o que é?

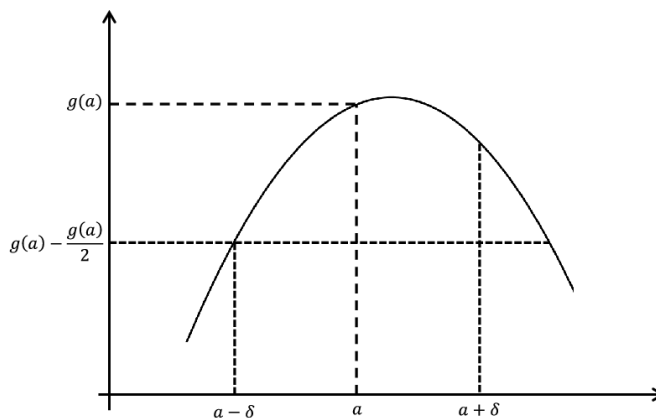
Essa é uma questão à qual dedicaremos bastante tempo no Capítulo ?? (em particular, veja o problema 11.1), então se você não perceber a dificuldade agora, não se preocupe; você irá entender. Enquanto isso, mantenha esse problema guardado em sua consciência. Ele é, como dissemos, fundamental.

O Teorema 9.21 também lida com quocientes de funções contínuas. No entanto, há um pequeno detalhe que precisa ser resolvido primeiro. Obviamente, quando consideramos a continuidade de f/g em a , precisamos assumir que $g(a) \neq 0$. Porém, g pode ser zero em outros valores. Como sabemos que, ao escolher nossa sequência (x_n) que converge para a , que $g(x_n) \neq 0$? Isso atrapalharia nossa ideia de usar o teorema correspondente para sequências (Teorema 7.26 do Capítulo 7). Isso pode ser resolvido com o seguinte lema.

Lema 9.29 Se g é contínua em a e $g(a) \neq 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

Problema 9.30 Prove o Lema 9.29.

Dica. Considere o caso em que $g(a) > 0$. Use a definição com $\varepsilon = \frac{g(a)}{2}$. A figura está abaixo; formalize-a.



Para o caso $g(a) < 0$, considere a função $-g$. □

Uma consequência deste lema é que se começarmos com uma sequência (x_n) convergindo para a , então para n suficientemente grande, $g(x_n) \neq 0$.

Problema 9.31 Use Teorema 9.21, para provar que se f e g são contínuas em a e $g(a) \neq 0$, então f/g é contínua em a . □

Teorema 9.32 Suponha que f é contínua em a e g é contínua em $f(a)$. Então $g \circ f$ é contínua em a . (Note que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.)

Problema 9.33 Prove Teorema 9.32

(a) Usando a definição de continuidade.

(b) Usando Teorema 9.21. □

Os teoremas acima nos permitem construir funções contínuas a partir de outras funções contínuas. Por exemplo, sabendo que $f(x) = x$ e $g(x) = c$ são contínuas, podemos concluir que qualquer polinômio,

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

é contínuo também. Também sabemos que funções como $f(x) = \sin(e^x)$ são contínuas sem precisar recorrer à definição.

Problema 9.34 Mostre que cada uma das seguintes é uma função contínua em todo ponto de seu domínio.

(a) Qualquer polinômio.

(b) Qualquer função racional. (Uma função racional é definida como uma razão de polinômios.)

(c) $\cos x$.

(d) As outras funções trigonométricas: $\tan(x)$, $\cot(x)$, $\sec(x)$ e $\csc(x)$. □

Problema 9.35 O que nos permite concluir que $f(x) = \sin(e^x)$ é contínua em qualquer ponto a sem recorrer à definição de continuidade? $\square$

Teorema 9.21 também pode ser usado para estudar a convergência de seqüências. Por exemplo, como $f(x) = e^x$ é contínua em qualquer ponto e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{n+1}{n}\right)} = e$. Isso também ilustra uma certa forma de pensar sobre funções contínuas. São aquelas em que podemos “comutar” a função e o limite de uma seqüência. Especificamente, se f é contínua em a e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$.

Problema 9.36 Calcule os seguintes limites. Certifique-se de indicar como a continuidade está envolvida.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n^2+1}}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{(\sin(1/n))}$

$\square$

Ter essa formulação rigorosa de continuidade é necessária para provar o Teorema do Valor Extremo e o Teorema do Valor Médio. Entretanto, falta um último ponto a ser tratado antes que possamos provar esses teoremas.

Faremos isso no próximo capítulo, mas antes de prosseguirmos é hora de definir um conceito fundamental que provavelmente foi um dos primeiros que você aprendeu em cálculo: limites.

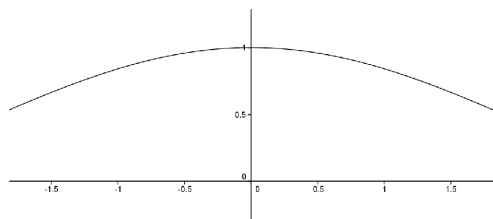
9.3 A Definição do Limite de uma Função

Desde que hoje em dia o conceito de limite é geralmente considerado o ponto de partida para o cálculo, você pode achar um pouco estranho que tenhamos escolhido falar sobre continuidade primeiro. Mas historicamente, a definição formal de limite veio depois da definição formal de continuidade. De certa forma, o conceito de limite fez parte de uma unificação de todas as ideias do cálculo que foram estudadas anteriormente e, subsequentemente, tornou-se a base para todas as ideias do cálculo. Por essa razão, é lógico fazê-lo o primeiro tópico abordado em um curso de cálculo.

Para ser justo, limites sempre estiveram presentes nos bastidores. Em suas tentativas de justificar seus cálculos, Newton usou o que chamou de doutrina das “Razões Últimas”. Especificamente, a razão $\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$ torna-se a razão última $2x$ no último instante antes de h — uma “quantidade evanescente” — desaparecer ([4], p. 33). De forma semelhante, os diferenciais “infinitamente pequenos” dx e dy de Leibniz podem ser vistos como uma tentativa de chegar “arbitrariamente perto” de x e y , respectivamente. Essa é a ideia central do cálculo: aproximar-se arbitrariamente de, digamos, x sem realmente alcançá-lo.

Como vimos no Capítulo 5, Lagrange tentou evitar toda a questão da “proximidade arbitrária”, tanto na forma de limite quanto na diferencial, quando, em 1797, tentou fundamentar o cálculo em séries infinitas.

Embora os esforços de Lagrange tenham falhado, eles prepararam o terreno para que Cauchy fornecesse uma definição da derivada que, por sua vez, dependia de sua formulação precisa de limite. Considere o seguinte exemplo: determinar o coeficiente angular da reta tangente (derivada) de $f(x) = \sin x$ em $x = 0$. Consideramos o gráfico do quociente das diferenças $D(x) = \frac{\sin x}{x}$.



Pelo gráfico, parece que $D(0) = 1$ mas devemos ter cuidado. $D(0)$ nem sequer existe! De algum modo precisamos transmitir a ideia de que $D(x)$ se aproximará de 1 conforme x se aproxima de 0, mesmo que a função não esteja definida em 0. A ideia de Cauchy era que o limite de $D(x)$ seria igual a 1 porque podemos fazer $D(x)$ diferir de 1 por tão pouco quanto quisermos ([6], p. 158).

Karl Weierstrass tornou essas ideias precisas em suas aulas de análise na Universidade de Berlim (1859-60) e nos forneceu nossa formulação moderna.

Definição 9.37 Dizemos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ desde que para cada $\varepsilon > 0$, exista $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$. $\diamond$

Antes de nos aprofundarmos nisso, note que é muito semelhante à definição de continuidade de $f(x)$ em $x = a$. De fato, podemos ver facilmente que f é contínua em $x = a$ se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Há duas diferenças entre esta definição e a definição de continuidade, e elas estão relacionadas. A primeira é que substituímos o valor $f(a)$ por L . Isso ocorre porque a função pode não estar definida em a . Em certo sentido, o valor limite L é o valor que f teria *se estivesse definida e fosse contínua em a* . A segunda é que substituímos

$$|x - a| < \delta$$

por

$$0 < |x - a| < \delta.$$

Novamente, como f não precisa estar definida em a , nem sequer consideraremos o que acontece quando $x = a$. Esse é o único propósito dessa mudança.

Como na definição do limite de uma sequência, esta definição não determina o que L é, ela apenas verifica se o seu palpite para o valor do limite está correto.

Finalmente, alguns comentários sobre as diferenças e semelhanças entre este limite e o limite de uma sequência são necessários, se não por outro motivo, ao menos porque usamos a mesma notação (lim) para ambos.

Quando estávamos trabalhando com sequências em Capítulo 7 e escrevíamos coisas como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ estávamos pensando em n como um inteiro que ficava cada vez maior. Para colocar isso de forma mais matemática, o parâmetro do limite n era tomado do conjunto dos inteiros positivos, ou $n \in \mathbb{N}$.

Tanto para continuidade quanto para o limite de uma função, escrevemos coisas como $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e pensamos em x como uma variável que se aproxima arbitrariamente do número a . Novamente, para ser mais matemático em nossa linguagem, diríamos que o parâmetro do limite x é tomado do ... Bem, na verdade, isso é interessante, não é? Precisamos tomar x de $\mathbb{Q}$ ou de $\mathbb{R}$? A exigência em ambos os casos é simplesmente que possamos escolher x arbitrariamente próximo de a . Pelo Teorema 3.11 do Capítulo 3 vemos que isso é possível, seja x racional ou não, então parece que qualquer um dos dois funciona. Isso leva à conclusão que soa paradoxal de que não precisamos de um contínuo ($\mathbb{R}$) para ter continuidade. Isso parece estranho.

Antes de analisarmos o exemplo acima, vejamos alguns exemplos algébricos para ver a definição em uso.

Exemplo 9.38 Considere a função $D(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, $x \neq 1$. Você provavelmente reconhece isso como o quociente de diferença usado para calcular a derivada de $f(x) = x^2$ em $x = 1$, então suspeitamos fortemente que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$. Assim como quando lidávamos com limites de sequências, deveríamos ser capazes de usar a definição para verificar isso. E, como antes, começaremos com alguns rascunhos.

RASCUNHO

Seja $\varepsilon > 0$. Desejamos encontrar um $\delta > 0$ tal que, se $0 < |x - 1| < \delta$, então $\left| \frac{x^2-1}{x-1} - 2 \right| < \varepsilon$. Com isso em mente, realizamos os seguintes cálculos

$$\left| \frac{x^2-1}{x-1} - 2 \right| = |(x+1) - 2| = |x-1|.$$

Agora temos uma noção de δ que funcionará na definição e apresentaremos a prova formal de que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

□

Proof. Seja $\varepsilon > 0$ e seja $\delta = \varepsilon$. Se $0 < |x - 1| < \delta$, então

$$\left| \frac{x^2-1}{x-1} - 2 \right| = |(x+1) - 2| = |x-1| < \delta = \varepsilon.$$

■

Como em nosso trabalho anterior com sequências e continuidade, note que o rascunho não faz parte da prova formal (embora tenha sido necessário para determinar um δ apropriado). Além disso, observe que $0 < |x - 1|$ não foi realmente usado, exceto para garantir que $x \neq 1$.

Problema 9.39 Use a definição de limite para verificar que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a.$$

□

Problema 9.40 Use a definição de limite para verificar cada um dos seguintes limites.

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$

Dica.

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^3 - 1}{x - 1} - 3 \right| &= |x^2 + x + 1 - 3| \\ &\leq |x^2 - 1| + |x - 1| \\ &= |(x - 1 + 1)^2 - 1| + |x - 1| \\ &= |(x - 1)^2 + 2(x - 1)| + |x - 1| \\ &\leq |x - 1|^2 + 3|x - 1|. \end{aligned}$$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = 1/2$

Dica.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} - \frac{1}{2} \right| &= \left| \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{2} \right| \\ &= \left| \frac{2 - (\sqrt{x}+1)}{2(\sqrt{x}+1)} \right| \\ &= \left| \frac{1-x}{2(1+\sqrt{x})^2} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} |x-1|. \end{aligned}$$

□

Voltemos ao problema original: mostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Embora rigorosa, nossa definição de continuidade é bastante trabalhosa. Realmente precisamos desenvolver algumas ferramentas que possamos usar para mostrar continuidade rigorosamente sem ter que recorrer diretamente à definição. Já vimos em [Teorema 9.21](#) uma forma de fazer isso. Aqui está outra. A chave é a observação que fizemos após a definição de limite:

f é contínua em $x = a$ se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Em outras palavras, poderíamos dizer que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ desde que, se redefinirmos $f(a) = L$ (ou definirmos $f(a) = L$ no caso de $f(a)$ não estar definido), então f se torna contínua em a . Isso nos permite usar toda a estrutura que provamos sobre funções contínuas e limites de sequências.

Por exemplo, o seguinte corolário ao [Teorema 9.21](#) surge quase que automaticamente após essa observação.

Corolário 9.41 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se, e somente se, f satisfaz a seguinte propriedade:

$$\forall \text{ sequências } (x_n), x_n \neq a, \text{ se } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ então } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L.$$

Armados com isso, podemos provar os seguintes teoremas familiares de limites do cálculo.

Teorema 9.42 Suponha que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, então

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L + M$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = L/M \text{ desde que } M \neq 0 \text{ e } g(x) \neq 0, \text{ para } x \text{ suficientemente próximo de } a \text{ (mas } x \neq a \text{)}.$$

Vamos provar a parte (a) para que você tenha uma ideia e deixar as partes (b) e (c) para você provar.

Proof. Seja (x_n) uma sequência tal que $x_n \neq a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = M$. Pelo [Teorema 7.18](#) do [Capítulo 7](#), temos $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + g(x_n) = L + M$. Como $\{x_n\}$ foi uma sequência arbitrária com $x_n \neq a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, concluímos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = L + M.$$

■

Problema 9.43 Prove as partes (b) e (c) do Teorema 9.42. □

Mais alinhado com nossas necessidades atuais, temos uma reformulação do Teorema do Confronto.

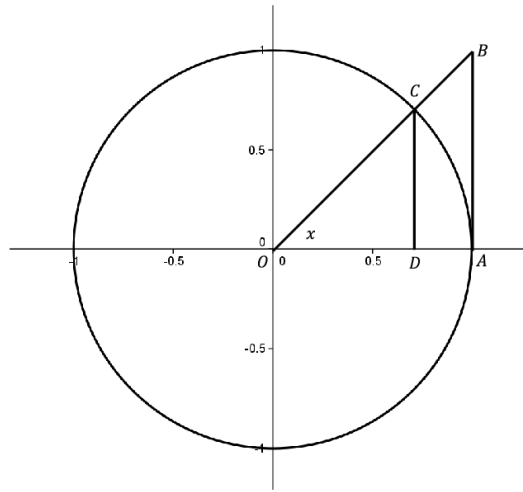
Teorema 9.44 Teorema do Confronto para funções

Suponha que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, para x suficientemente próximo de a (mas $x \neq a$). Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$, então $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ também.

Problema 9.45 Prove o Teorema 9.44.

Dica. Use o Teorema 7.29, o Teorema do Confronto para seqüências do Capítulo 7. □

Retornando ao limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$, veremos que o Teorema do Confronto é exatamente o que precisamos. Primeiro, note que como $D(x) = \sin x/x$ é uma função par, precisamos focar apenas em $x > 0$ em nossas desigualdades. Considere o círculo unitário.



Problema 9.46 Use o fato de que

$$\text{área}(\triangle OAC) < \text{área}(\text{setor } OAC) < \text{área}(\triangle OAB)$$

para mostrar que se $0 < x < \pi/2$, então $\cos x < \sin x/x < 1$. Use o fato de que todas essas funções são pares para estender a desigualdade para $-\pi/2 < x < 0$ e use o Teorema do Confronto para mostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. □

9.4 A derivada, Uma reflexão tardia

Não, a derivada não é algo secundário. Juntamente com a integral, ela é, de fato, um dos objetos matemáticos mais poderosos e úteis já criados, e temos trabalhado arduamente para fornecer uma base sólida e rigorosa para ela. Nesse sentido, é um foco principal de nossas investigações.

Por outro lado, agora que construímos toda a estrutura necessária para definir e explorar o conceito de derivada, ela parecerá um tanto comum diante de ideias como a convergência de séries de potências, séries de Fourier e as propriedades bizarras de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

Você passou um semestre inteiro aprendendo sobre as propriedades da derivada e como usá-las para explorar as propriedades das funções, então não

repetiremos esse esforço aqui. Em vez disso, definiremos formalmente a derivada em termos das ideias e técnicas que desenvolvemos até agora.

Definição 9.47 A Derivada. Dada uma função $f(x)$ definida em um intervalo (a, b) , definimos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

◇

Existem alguns fatos bastante óbvios sobre essa definição que, no entanto, vale a pena notar explicitamente:

1. A derivada é *definida em um ponto*. Se ela for definida em todo ponto de um intervalo (a, b) , dizemos que a derivada existe em todo ponto desse intervalo.
2. Como é definida em um ponto, é ao menos teoricamente possível que uma função seja diferenciável em apenas um único ponto de todo o seu domínio.
3. Como é definida como um limite e nem todos os limites existem, funções não são necessariamente diferenciáveis.
4. Como é definida por um limite, aplica-se o [Corolário 9.41](#). Ou seja, $f'(x)$ existe se, e somente se, para $\forall$ sequências (h_n) , $h_n \neq 0$, se $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ então

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n}.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$, isso também pode ser escrito como

$$f'(x) = \lim_{h_n \rightarrow 0} \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n}.$$

Teorema 9.48 Diferenciabilidade implica continuidade

Se f é diferenciável em um ponto c , então f é contínua em c também.

Problema 9.49 Prove o [Teorema 9.48](#) □

Como mencionamos, a derivada é uma ferramenta matemática extraordinariamente útil, mas não é nossa intenção aqui aprender a *usá-la*. Nosso propósito é defini-la rigorosamente (feito) e mostrar que nossa definição formal, de fato, recupera as propriedades úteis que você aprendeu e apreciou em seu curso de cálculo.

A primeira propriedade desse tipo é conhecida como Teorema de Fermat.

Teorema 9.50 Teorema de Fermat. *Suponha que f seja diferenciável em algum intervalo (a, b) contendo c . Se $f(c) \geq f(x)$ para todo x em (a, b) , então $f'(c) = 0$.*

Proof. Como $f'(c)$ existe, sabemos que se $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para zero, então a sequência $a_n = \frac{f(c+h_n) - f(c)}{h_n}$ converge para $f'(c)$. A prova consiste em mostrar que $f'(c) \leq 0$ e que $f'(c) \geq 0$, a partir do que concluímos que $f'(c) = 0$. Mostraremos apenas a primeira parte. A segunda fica como exercício.

Afirmção: $f'(c) \leq 0$.

Seja n_0 suficientemente grande para que $\frac{1}{n_0} < b - c$ e tome $(h_n) = (\frac{1}{n})_{n=n_0}^{\infty}$. Então $f(c + \frac{1}{n}) - f(c) \leq 0$ e $\frac{1}{n} > 0$, de modo que

$$\frac{f(c + h_n) - f(c)}{h_n} \leq 0, \quad \forall n = n_0, n_0 + 1, \dots$$

Portanto, $f'(c) = \lim_{h_n \rightarrow 0} \frac{f(c+h_n) - f(c)}{h_n} \leq 0$ também. ■

Problema 9.51 Mostre que $f'(c) \geq 0$ e conclua que $f'(c) = 0$. □

Problema 9.52 Mostre que se $f(c) \leq f(x)$ para todo x em algum intervalo (a, b) , então $f'(c) = 0$ também. □

Muitas das propriedades mais importantes da derivada decorrem do que é chamado de Teorema do Valor Médio (**TVM**), que agora enunciaremos.

Teorema 9.53 Teorema do Valor Médio

Suponha que f' exista para todo $x \in (a, b)$ e que f seja contínua em $[a, b]$. Então existe um número real $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

No entanto, seria difícil provar o TVM agora. Portanto, primeiro enunciaremos e provaremos o Teorema de Rolle, que pode ser visto como um caso especial do TVM. A prova do TVM então seguirá facilmente.

Michel Rolle enunciou o seguinte teorema em 1691. Considerando essa data e a natureza do teorema, seria razoável supor que Rolle foi um dos primeiros desenvolvedores do cálculo, mas não foi assim. Na verdade, Rolle desprezava as versões do cálculo de Newton e Leibniz, chegando a ridicularizá-las como um conjunto de “falácias engenhosas.” É um tanto irônico que seu teorema seja tão fundamental para o desenvolvimento moderno do cálculo que ele ridicularizou.

Teorema 9.54 Teorema de Rolle

Suponha que f' exista para todo $x \in (a, b)$, que f seja contínua em $[a, b]$ e que

$$f(a) = f(b).$$

Então existe um número real $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = 0.$$

Proof.

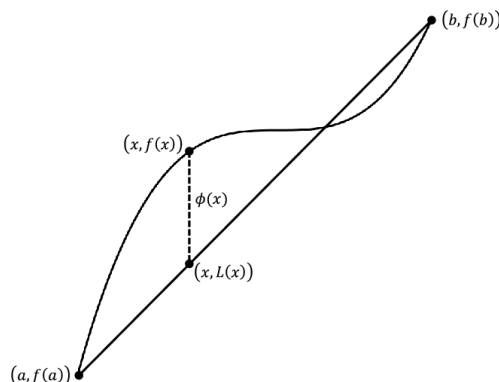
Qualquer prova que dependa do Teorema do Valor Extremo não está completa até que o TVE seja provado. Isso será feito no [Capítulo 10](#).

Como f é contínua em $[a, b]$, pelo Teorema do Valor Extremo temos que f atinge um máximo e um mínimo em $[a, b]$. Denotemos o máximo por M e o mínimo por m . Há vários casos:

- Caso 1:** $f(a) = f(b) = M = m$. Nesse caso, $f(x)$ é constante (por quê?). Portanto, $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$.
- Caso 2:** $f(a) = f(b) = M \neq m$. Nesse caso, existe um número real $c \in (a, b)$ tal que $f(c)$ é um mínimo local. Pelo Teorema de Fermat, $f'(c) = 0$.
- Caso 3:** $f(a) = f(b) = m \neq M$. Nesse caso, existe um número real $c \in (a, b)$ tal que $f(c)$ é um máximo local. Pelo Teorema de Fermat, $f'(c) = 0$.
- Caso 4:** $f(a) = f(b)$ não é nem máximo nem mínimo. Nesse caso, existem números reais $c_1, c_2 \in (a, b)$ tais que $f(c_1)$ é um máximo local e $f(c_2)$ é um mínimo local. Pelo Teorema de Fermat, $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$.

■

Com o Teorema de Rolle em mãos, podemos provar o TVM, que é realmente um corolário do Teorema de Rolle ou, mais precisamente, uma generalização do Teorema de Rolle. Para prová-lo, só precisamos encontrar a função certa para aplicar o Teorema de Rolle. A figura a seguir mostra uma função $f(x)$ cortada por uma reta secante $L(x)$, que vai de $(a, f(a))$ até $(b, f(b))$.



A diferença vertical entre $f(x)$ e a reta secante, indicada por $\phi(x)$ na figura, deve resolver o problema. Agora é com você.

Problema 9.55 Prove o Teorema do Valor Médio. $\square$

O Teorema do Valor Médio é extraordinariamente útil. Quase todas as propriedades da derivada que você usou no cálculo decorrem mais ou menos facilmente dele. Por exemplo, o seguinte é verdadeiro.

Corolário 9.56 Se $f'(x) > 0$ para todo x no intervalo (a, b) , então para todo $c, d \in (a, b)$ com $d > c$ temos

$$f(d) > f(c).$$

Ou seja, f é crescente em (a, b) .

Proof. Suponha que c e d sejam como descrito no corolário. Então, pelo Teorema do Valor Médio, existe algum número, digamos $\alpha \in (c, d) \subseteq (a, b)$, tal que

$$f'(\alpha) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c}.$$

Como $f'(\alpha) > 0$ e $d - c > 0$, temos $f(d) - f(c) > 0$, ou seja, $f(d) > f(c)$. $\blacksquare$

Problema 9.57 Mostre que se $f'(x) < 0$ para todo x no intervalo (a, b) então f é decrescente em (a, b) . $\square$

Corolário 9.58 Suponha que f seja diferenciável em algum intervalo (a, b) , f' seja contínua em (a, b) , e que $f'(c) > 0$ para algum $c \in (a, b)$. Então existe um intervalo $I \subset (a, b)$ contendo c tal que para todo $x, y \in I$ com $x \geq y$, temos $f(x) \geq f(y)$.

Problema 9.59 Prove o [Corolário 9.58](#). $\square$

Problema 9.60 Mostre que se f é diferenciável em algum intervalo (a, b) e $f'(c) < 0$ para algum $c \in (a, b)$, então existe um intervalo $I \subset (a, b)$ contendo c tal que para todo $x, y \in I$ com $x \leq y$, temos $f(x) \leq f(y)$. $\square$

9.5 Problemas adicionais

Problema 9.61 Use a definição de continuidade para provar que a função constante $g(x) = c$ é contínua em qualquer ponto a . $\square$

Problema 9.62

(a) Use a definição de continuidade para provar que $\ln x$ é contínua em 1.

Dica. Você pode querer usar o fato de que $|\ln x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < \ln x < \varepsilon$ para encontrar um δ .

(b) Use a parte (a) para provar que $\ln x$ é contínua em qualquer número real positivo a .

Dica. $\ln(x) = \ln(x/a) + \ln(a)$. Esta é uma combinação de funções contínuas em a . Explique como você sabe que $\ln(x/a)$ é contínua em a . $\square$

Problema 9.63 Escreva uma definição formal da afirmação “ f não é contínua em a ” e use-a para provar que a função

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

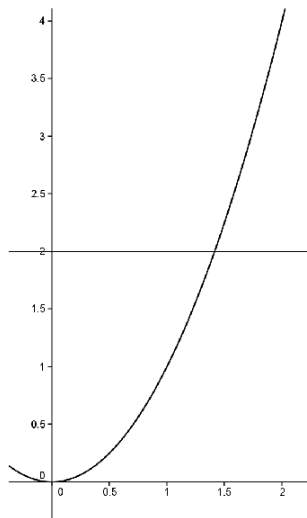
não é contínua em $a = 1$. $\square$

Capítulo 10

Valores intermediários e extremos

10.1 Completude do sistema de números reais

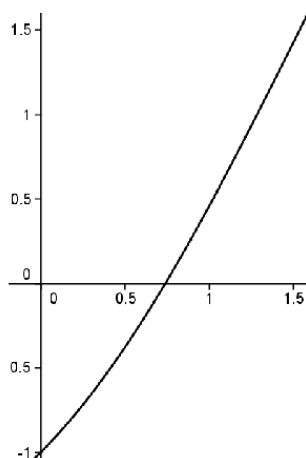
Lembre-se que ao derivar as formas de Lagrange e Cauchy do resto das séries de Taylor, fizemos uso do theorem do Valor Extremo (**EVT**) e do theorem do Valor Intermediário (**IVT**). Em [Chapter 9](#), produzimos uma definição analítica de continuidade que podemos usar para proofr esses theorems. Para fornecer o restante das ferramentas necessárias, precisamos explorar a composição do sistema de números reais. Para ilustrar o que queremos dizer, suponha que usamos apenas o sistema de números racionais. Ainda poderíamos usar nossa definição de continuidade e ainda considerar funções contínuas como $f(x) = x^2$. Observe que 2 é um valor que fica entre $f(1) = 1$ e $f(2) = 4$.



O IVT diz que em algum lugar entre 1 e 2, f deve assumir o valor 2. Ou seja, deve existir algum número $c \in [1, 2]$ tal que $f(c) = 2$. Você pode dizer: “Grande coisa! Todo mundo sabe que $c = \sqrt{2}$ funciona.”

Porém, estamos trabalhando apenas com números racionais e $\sqrt{2}$ não é racional. Como vimos em [Chapter 3](#) o sistema de números racionais tem lacunas, enquanto o sistema de números reais não. Novamente, “Grande coisa! Digamos apenas que o sistema de números reais contém raízes (quadradas).”

Isso parece razoável e realmente funciona para raízes quadradas, mas considere a função $f(x) = x - \cos x$. Sabemos que esta é uma função contínua. Também sabemos que $f(0) = -1$ e $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$. De acordo com o IVT, deve haver algum número $c \in [0, \frac{\pi}{2}]$, onde $f(c) = 0$. O gráfico está abaixo.

Graph of $f(x) = x - \cos x$

A situação não é tão transparente como antes. O que seria esse misterioso c onde a curva cruza o eixo x ? De alguma forma, precisamos transmitir a ideia de que o sistema de números reais é um continuum. Ou seja, não tem "buracos" nele.

Que tal isso? Por que simplesmente não dizemos que não tem buracos? Às vezes, a resposta simples funciona melhor! Mas não neste caso. Como vamos formular uma proof rigorosa com base nesta afirmação? Assim como acontece com a convergência e a continuidade, o que precisamos é de uma forma rigorosa de transmitir a ideia de que o sistema de números reais não tem lacunas, que é *completo*.

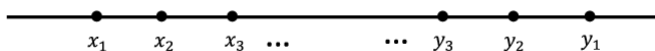
Veremos que existem diversas maneiras diferentes, mas equivalentes, de transmitir esta noção de completude. Exploraremos alguns deles neste capítulo. Por enquanto adotamos o seguinte como nosso *Axioma da Completude* para o sistema de números reais.

Axioma 10.1 Propriedade de intervalo aninhado do sistema de números reais (NIP). *Suponha que temos duas sequências de números reais (x_n) e (y_n) satisfazendo as seguintes condições:*

1. $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$ (isto diz que a sequência, (x_n) , não é decrescente)
2. $y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq \dots$ (isto diz que a sequência, (y_n) , não é crescente)
3. $\forall n, x_n \leq y_n$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$

Então existe um número único c tal que $x_n \leq c \leq y_n$ para todos n .

Geometricamente, temos a seguinte situação.



Observe que temos duas sequências (x_n) e (y_n) , uma crescente (realmente não decrescente) e uma decrescente (não crescente). Essas sequências não se

cruzam. Na verdade, o seguinte é verdade:

Problema 10.2 Sejam $(x_n), (y_n)$ seqüências como no NIP. Mostre que para todo $n, m \in \mathbb{N}$, $x_n \leq y_m$. $\square$

Eles também estão se unindo no sentido de que $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$. O NIP diz que neste caso existe um número real único c no meio de tudo isso $\{x_n \leq c \leq y_n \text{ para todo } n\}$.



Se não existisse tal c , então haveria um buraco onde essas duas seqüências se juntam. O NIP garante que não existe tal buraco. Não precisamos de proof isto, uma vez que um axioma é, por definição, uma verdade autoevidente. Acreditamos que o sistema de números reais obedece a esta lei. O próximo problem mostra que a propriedade de completude distingue o sistema de números reais do sistema de números racionais.

Problema 10.3

- (a) Encontre duas seqüências de números racionais (x_n) e (y_n) que satisfaçam as propriedades 1-4 do NIP e tais que não haja número racional c satisfazendo a conclusão do NIP.

Hint. Considere a expansão decimal de um número irracional.

- (b) Encontre duas seqüências de números racionais (x_n) e (y_n) que satisfaçam as propriedades 1-4 do NIP e tais que exista um número racional c satisfazendo a conclusão do NIP.

$\square$

Você pode achar o nome “Propriedade de intervalo aninhado” um tanto curioso. Uma maneira de pensar sobre esta propriedade é considerar que temos uma seqüência de “intervalos fechados aninhados” $[x_1, y_1] \supseteq [x_2, y_2] \supseteq [x_3, y_3] \supseteq \dots$ cujos comprimentos $y_n - x_n$ estão “encolhendo para 0.” A conclusão é que a interseção desses intervalos não é vazia e, na verdade, consiste em um único ponto. Ou seja, $\bigcap_{n=1}^{\infty} [x_n, y_n] = \{c\}$.

Parece que as seqüências (x_n) e (y_n) no NIP convergem para c . Isto é, de facto, verdade e pode ser proofdo rigorosamente. A seguir, esta será uma informação valiosa.

Teorema 10.4 Suponha que temos duas seqüências (x_n) e (y_n) satisfazendo todas as suposições da propriedade de intervalo aninhado. Se c é o número único tal que $x_n \leq c \leq y_n$ para todo n , então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c$.

Problema 10.5 Prove [theorem 10.4](#). $\square$

Para ilustrar a ideia de que o NIP “tampa os buracos” na reta real, proofremos a existência de raízes quadradas de números reais não negativos.

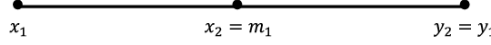
Teorema 10.6 Suponha $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$. Existe um número real $c \geq 0$ tal que $c^2 = a$.

Observe que não podemos simplesmente dizer, “Seja $c = \sqrt{a}$,” já que a ideia é mostrar que esta raiz quadrada existe. Na verdade, ao longo desta proof, não podemos realmente utilizar um símbolo de raiz quadrada, pois ainda não proofmos que eles (raízes quadradas) existem. Daremos a ideia por trás da proof, pois ela ilustra como o NIP é usado.

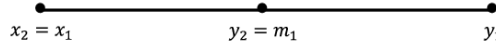
Esboço da proof. Nossa estratégia é construir duas seqüências que irão “estretar” o número c que procuramos. Com isso em mente, precisamos encontrar um

número x_1 tal que $x_1^2 \leq a$ e um número y_1 tal que $y_1^2 \geq a$. (Lembre-se de que não podemos dizer $\sqrt{x_1}$ ou $\sqrt{y_1}$.) Existem muitas possibilidades, mas que tal $x_1 = 0$ e $y_1 = a + 1$? Você pode verificar se eles irão satisfazer $x_1^2 \leq a \leq y_1^2$. Além disso $x_1 \leq y_1$. Este é o ponto de partida.

A técnica que empregaremos é frequentemente chamada de técnica de bissecção e é uma forma útil de nos prepararmos para a aplicação do NIP. Seja m_1 o ponto médio do intervalo $[x_1, y_1]$. Então temos $m_1^2 \leq a$ ou $m_1^2 \geq a$. No caso $m_1^2 \leq a$, realmente queremos que m_1 tome o lugar de x_1 , pois é maior que x_1 , mas ainda representa uma subestimativa para qual seria a raiz quadrada de a . Esse pensamento leva ao seguinte movimento. Se $m_1^2 \leq a$, iremos renomear as coisas deixando $x_2 = m_1$ e $y_2 = y_1$. A situação é assim na reta numérica.



No outro caso onde $a \leq m_1^2$, iremos renomear as coisas deixando $x_2 = x_1$ e $y_2 = m_1$. A situação é assim na reta numérica.



Em ambos os casos, reduzimos o comprimento do intervalo onde se encontra a raiz quadrada para metade do tamanho que tinha antes. Dito em termos mais específicos, em ambos os casos temos os mesmos resultados:

$$x_1 \leq x_2 \leq y_2 \leq y_1; \quad x_1^2 \leq a \leq y_1^2; \quad x_2^2 \leq a \leq y_2^2$$

e

$$y_2 - x_2 = \frac{1}{2} (y_1 - x_1).$$

Agora jogamos o mesmo jogo, mas em vez disso começamos com o intervalo $[x_2, y_2]$. Seja m_2 o ponto médio de $[x_2, y_2]$. Então temos $m_2^2 \leq a$ ou $m_2^2 \geq a$. Se $m_2^2 \leq a$, renomeamos $x_3 = m_2$ e $y_3 = y_2$. Se $a \leq m_2^2$, renomeamos $x_3 = x_2$ e $y_3 = m_2$. Em ambos os casos, terminamos com

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq y_3 \leq y_2 \leq y_1; \quad x_1^2 \leq a \leq y_1^2; \quad x_2^2 \leq a \leq y_2^2; \quad x_3^2 \leq a \leq y_3^2$$

e

$$y_3 - x_3 = \frac{1}{2} (y_2 - x_2) = \frac{1}{2^2} (y_1 - x_1).$$

Continuando desta forma, produziremos duas sequências, (x_n) e (y_n) satisfazendo as seguintes condições:

1. $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$
2. $y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq \dots$
3. $\forall n, x_n \leq y_n$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} (y_1 - x_1) = 0$
5. Essas sequências também satisfazem a seguinte propriedade:

$$\forall n, x_n^2 \leq a \leq y_n^2$$

As propriedades 1-4 nos dizem que (x_n) e (y_n) satisfazem todas as condições do NIP, então podemos concluir que deve existir um número real c tal que $x_n \leq c \leq y_n$ para todo n . Neste ponto, você deve ser capaz de usar a propriedade 5. para mostrar que $c^2 = a$ conforme desejado. ■

Problema 10.7 Transforme o esboço acima em uma proof formal de Theorem ??.

O método de bissecção que empregamos na proof de theorem ?? é bastante típico de como usaremos o NIP, pois tomar pontos médios garante que criaremos uma sequência de “intervalos aninhados”. Empregaremos esta estratégia nas proofs do IVT e EVT. A decisão de como renomear os pontos finais dos nossos intervalos será determinada pelo que queremos fazer com estas duas sequências de números reais. Isto normalmente levará a uma quinta propriedade, que será crucial para proofoir que o c garantido pelo NIP faz o que queremos que faça. Especificamente, no exemplo acima, sempre quisemos que nosso candidato para $\sqrt{a}$ estivesse no intervalo $[x_n, y_n]$. Essa escolha criteriosa levou à Propriedade 5 extra: $\forall n, x_n^2 \leq a \leq y_n^2$. Ao aplicar o NIP para comproofoir o IVT e o EVT, descobriremos que as propriedades 1 a 4 permanecerão as mesmas. Propriedade 5 é o que mudará com base na propriedade que queremos que c tenha.

Antes de abordarmos o IVT e o EVT, vamos usar o NIP para abordar uma questão interessante sobre a Série Harmônica. Lembre-se de que a Série Harmônica, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$, cresce sem limites, ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. A questão é quão lentamente esta série cresce? Por exemplo, quantos termos seriam necessários para que a série ultrapassasse 100? 1000? 10.000? Leonhard Euler decidiu resolver este problem da seguinte maneira. Euler decidiu considerar o $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \ln(n+1) \right)$. Este limite é chamado de constante de Euler e é denotado por γ . Isso diz que para n grande, temos $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \approx \ln(n+1) + \gamma$. Se pudéssemos aproximar γ , então poderíamos substituir a desigualdade $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \geq 100$ com a desigualdade mais tratável $\ln(n+1) + \gamma \geq 0$ e resolva para n nisso. Isso deve nos dizer aproximadamente quantos termos precisariam ser adicionados na Série Harmônica para ultrapassar 100. Aproximar γ com um computador não é tão ruim. Poderíamos fazer n tão grande quanto desejarmos em $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \ln(1+n)$ para fazer aproximações mais próximas para γ . A verdadeira questão é: **COMO SABEMOS ISSO**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \ln(n+1) \right)$$

EXISTE REALMENTE?

Você pode querer dizer que obviamente deveria, mas vamos salientar que, no momento da impressão deste livro (2013), nem se sabe se γ é racional ou irracional. Assim, na nossa opinião a existência deste limite não é tão óbvia. É aqui que o PIN entrará em ação; iremos utilizá-lo para mostrar que este limite, de facto, existe. Os detalhes estão no seguinte problem.

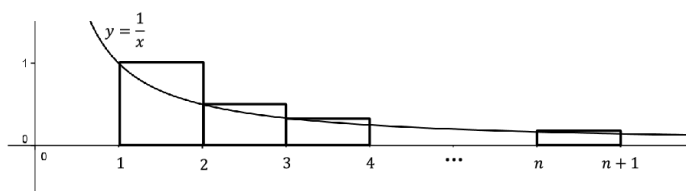
Problema 10.8 O objetivo deste problem é mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \ln(n+1) \right)$$

existe.

- (a) Seja $x_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \ln(n+1)$. Use o diagrama a seguir para mostrar

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$$



- (b) Seja $z_n = \ln(n+1) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right)$. Use um diagrama semelhante para mostrar que $z_1 \leq z_2 \leq z_3 \leq \cdots$.
- (c) Seja $y_n = 1 - z_n$. Mostre que (x_n) e (y_n) satisfazem as hipóteses da propriedade do intervalo aninhado e use o NIP para concluir que existe um número real γ tal que $x_n \leq \gamma \leq y_n$ para todos n .
- (d) Conclua que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \ln(n+1) = \gamma$.

□

Problema 10.9 Use o fato de que $x_n \leq \gamma \leq y_n$ para todo n para aproximar γ com três casas decimais. □

Problema 10.10

- (a) Use o fato de que para n grande, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \approx \ln(n+1) + \gamma$ para determinar aproximadamente quão grande n deve ser para fazer

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \geq 100.$$

- (b) Suponha que temos um supercomputador que pode adicionar 10 trilhões de termos da Série Harmônica por segundo. Aproximadamente quantas vidas terrestres seriam necessárias para este computador somar a série harmônica até ultrapassar 100?

□

10.2 proof do theorem do Valor Intermediário

Agora temos todas as ferramentas para proofo o theorem do Valor Intermediário (IVT).

Teorema 10.11 theorem do Valor Intermediário

Suponha que $f(x)$ seja contínuo em $[a, b]$ e v seja qualquer número real entre $f(a)$ e $f(b)$. Então existe um número real $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = v$.

Esboço da proof. Temos dois casos a considerar: $f(a) \leq v \leq f(b)$ e $f(a) \geq v \geq f(b)$.

Veremos o caso $f(a) \leq v \leq f(b)$. Sejam $x_1 = a$ e $y_1 = b$, então temos $x_1 \leq y_1$ e $f(x_1) \leq v \leq f(y_1)$. Seja m_1 o ponto médio de $[x_1, y_1]$ e observe que temos $f(m_1) \leq v$ ou $f(m_1) \geq v$. Se $f(m_1) \leq v$, então renomeamos $x_2 = m_1$ e $y_2 = y_1$. Se $f(m_1) \geq v$, então renomeamos $x_2 = x_1$ e $y_2 = m_1$. Em ambos os casos, terminamos com $x_1 \leq x_2 \leq y_2 \leq y_1$, $y_2 - x_2 = \frac{1}{2}(y_1 - x_1)$, $f(x_1) \leq v \leq f(y_1)$, e $f(x_2) \leq v \leq f(y_2)$.

Agora jogue o mesmo jogo com o intervalo $[x_2, y_2]$. Se continuarmos jogando este jogo, geraremos duas sequências (x_n) e (y_n) , satisfazendo todas as condições da propriedade de intervalo aninhado. Essas sequências também satisfarão a seguinte propriedade extra: $\forall n, f(x_n) \leq v \leq f(y_n)$. Pelo NIP, existe um c tal que $x_n \leq c \leq y_n, \forall n$. Este deve ser o c que procuramos, embora não seja óbvio. Especificamente, precisamos mostrar que $f(c) = v$. Deve ser aqui que a continuidade de f em c e a propriedade extra em (x_n) e (y_n) entram em jogo. ■

Problema 10.12 Transforme as ideias dos parágrafos anteriores em uma proof formal do IVT para o caso $f(a) \leq v \leq f(b)$. □

Problema 10.13 Podemos modificar a proof do caso $f(a) \leq v \leq f(b)$ em uma proof do IVT para o caso $f(a) \geq v \geq f(b)$. No entanto, existe uma maneira mais sorrateira de proofo esse caso, aplicando o IVT à função $-f$. Faça isso para proofo o IVT para o caso $f(a) \geq v \geq f(b)$. $\square$

Problema 10.14 Use o IVT para proofo que qualquer polinômio de grau ímpar deve ter uma raiz real. $\square$

10.3 O theorem de Bolzano-Weierstrass

Depois que introduzimos a propriedade do intervalo aninhado, o theorem do valor intermediário foi seguido rapidamente. A proof do Valor Extremo (que diz que qualquer função contínua f definida em um intervalo fechado $[a, b]$ deve ter um máximo e um mínimo) dá um pouco mais de trabalho. Primeiro precisamos mostrar que tal função é limitada.

Teorema 10.15 *Uma função contínua definida em um intervalo fechado e limitado deve ser limitada. Ou seja, seja f uma função contínua definida em $[a, b]$. Então existe um número real positivo B tal que $|f(x)| \leq B$ para todos $x \in [a, b]$.*

Esboço da Suposta proof: Vamos supor, por contradição, que não existe tal limite B . Isso diz que para qualquer inteiro positivo n , deve existir $x_n \in [a, b]$ tal que $|f(x_n)| > n$. (Caso contrário n seria um limite para f .) **IF** a sequência (x_n) convergiu para algo em $[a, b]$, digamos c , então teríamos nossa contradição. Na verdade, teríamos $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. Pela continuidade de f em c e [theorem 9.21](#) de Capítulo ??, gostaríamos tem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(c)$. Isso diria que a sequência $(f(x_n))$ converge, então por [Lemma 7.21](#) de [Chapter 7](#), deve ser limitado. Isso forneceria nossa contradição, como tínhamos $|f(x_n)| > n$, para todos os inteiros positivos n . **QED?**

Tudo isso funcionaria bem, exceto por um pequeno problem. Da forma como foi construída, não há razão para esperar que a sequência (x_n) convirja para alguma coisa e não podemos fazer tal suposição. É por isso que enfatizamos o **IF** acima. Felizmente, esta ideia pode ser recuperada. Embora seja verdade que a sequência (x_n) pode não convergir, parte dela irá. Precisaremos da seguinte definição.

Definição 10.16 Seja $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência estritamente crescente de inteiros positivos; isto é, $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência, então $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty} = (x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots)$ é chamado de {subsequência} de (x_n) . $\diamond$

A ideia é que uma subsequência de uma sequência seja parte da sequência, (x_n) , que é em si uma sequência. Porém, é um pouco mais restritivo. Podemos escolher qualquer termo da nossa sequência para fazer parte da subsequência, mas uma vez escolhido esse termo, não podemos voltar atrás. É aqui que entra a condição $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Por exemplo, suponha que iniciamos nossa subsequência com o termo x_{100} . Não poderíamos escolher nosso próximo termo como x_{99} . O subscrito do próximo termo teria que ser maior que 100. Na verdade, o problem de uma subsequência é que está tudo nos subscritos; estamos realmente escolhendo uma subsequência (n_k) da sequência de subscritos (n) em (x_n) .

Exemplo 10.17 Dada a sequência (x_n) , as seguintes são subsequências.

$$(a) (x_2, x_4, x_6, \dots) = (x_{2k})_{k=1}^{\infty}$$

$$(b) (x_1, x_4, x_9, \dots) = (x_{k^2})_{k=1}^{\infty}$$

(c) (x_n) em si.

□

Exemplo 10.18 Os itens a seguir NÃO são subsequências.

(a) $(x_1, x_1, x_1, \dots)$

(b) $(x_{99}, x_{100}, x_{99}, \dots)$

(c) (x_1, x_2, x_3)

□

Os subscritos nos exemplos que vimos até agora têm um padrão discernível, mas não precisa ser esse o caso. Por exemplo,

$$(x_2, x_5, x_{12}, x_{14}, x_{23}, \dots)$$

seria uma subsequência, desde que os próprios subscritos formem uma sequência crescente.

Problema 10.19 Suponha $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. Prove que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c$ para qualquer subsequência (x_{n_k}) de (x_n) .

Dica. $n_k \geq k$.

□

Um theorem muito importante sobre subsequências foi introduzido por Bernhard Bolzano e, mais tarde, comproofdo de forma independente por Karl Weierstrass. Basicamente, este theorem diz que qualquer sequência limitada de números reais tem uma subsequência convergente.

Teorema 10.20 theorem de Bolzano-Weierstrass

Seja (x_n) uma sequência de números reais tal que $x_n \in [a, b]$, $\forall n$. Então existe $c \in [a, b]$ e uma subsequência (x_{n_k}) , tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c$.

Como exemplo deste theorem, considere a sequência

$$((-1)^n) = (-1, 1, -1, 1, \dots).$$

Esta sequência não converge, mas a subsequência

$$((-1)^{2k}) = (1, 1, 1, \dots)$$

converge para 1. Esta não é a única subsequência convergente, pois $((-1)^{2k+1}) = (-1, -1, -1, \dots)$ converge para -1 . Observe que se a sequência for ilimitada, todas as apostas serão canceladas; a sequência pode ter uma subsequência convergente ou não. As sequências $((-1)^n + 1)n$ e (n) representam essas possibilidades como a primeira tem, por exemplo, $((-1)^{2k+1} + 1)(2k + 1) = (0, 0, 0, \dots)$ e o segundo não tem nenhum.

O theorem de Bolzano-Weierstrass diz que não importa quão “aleatória” a sequência (x_n) possa ser, desde que seja limitada, alguma parte dela deve convergir. Isto é muito útil quando se tem algum processo que produz uma sequência “aleatória” como a que tivemos na ideia da suposta proof em theorem ??.

Esboço de uma proof do theorem de Bolzano-Weierstrass. Suponha que temos nossa sequência (x_n) tal que $x_n \in [a, b]$, $\forall n$. Para encontrar nosso c para a subsequência convergir, usaremos o NIP. Como já estamos usando (x_n) como nossa sequência original, precisaremos usar letras diferentes para nos prepararmos para o NIP. Com isso em mente, sejam $a_1 = a$ e $b_1 = b$, e observe que $x_n \in [a_1, b_1]$ para infinitos n . (Isso é, de fato, verdade para todo n , mas você verá por que dissemos isso da maneira que dissemos.) Seja m_1 o ponto médio de $[a_1, b_1]$ e observe que $x_n \in [a_1, m_1]$ para infinitos n ou $x_n \in [m_1, b_1]$ para infinitos n . Se $x_n \in [a_1, m_1]$ para infinitos n , então renomeamos $a_2 = a_1$

e $b_2 = m_1$. Se $x_n \in [m_1, b_1]$ para infinitos n , então reclassifique $a_2 = m_1$ e $b_2 = b_1$. Em ambos os casos, obtemos $a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1$, $b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1)$, e $x_n \in [a_2, b_2]$ para infinitos n .

Agora consideramos o intervalo $[a_2, b_2]$ e seja m_2 o ponto médio de $[a_2, b_2]$. Como $x_n \in [a_2, b_2]$ para infinitos n , então $x_n \in [a_2, m_2]$ para infinitos n ou $x_n \in [m_2, b_2]$ para infinitos n . Se $x_n \in [a_2, m_2]$ para infinitos n , então renomeamos $a_3 = a_2$ e $b_3 = m_2$. Se $x_n \in [m_2, b_2]$ para infinitos n , então renomeamos $a_3 = m_2$ e $b_3 = b_2$. Em ambos os casos, obtemos $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$, $b_3 - a_3 = \frac{1}{2}(b_2 - a_2) = \frac{1}{2^2}(b_1 - a_1)$, e $x_n \in [a_3, b_3]$ para infinitos n .

Se continuarmos desta maneira, produziremos duas sequências (a_k) e (b_k) com as seguintes propriedades:

1. $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$
2. $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots$
3. $\forall k, a_k \leq b_k$
4. $\lim_{k \rightarrow \infty} (b_k - a_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{k-1}} (b_1 - a_1) = 0$
5. Para cada k , $x_n \in [a_k, b_k]$ para infinitos n

Pelas propriedades 1-5 e pelo NIP, existe um único c tal que $c \in [a_k, b_k]$, para todo k . Em particular, $c \in [a_1, b_1] = [a, b]$.

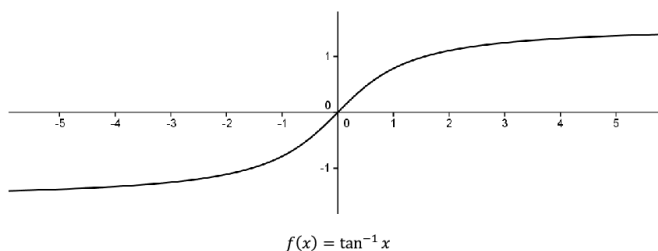
Temos nosso c . Agora precisamos construir uma subsequência convergente para ela. Como $x_n \in [a_1, b_1]$ para infinitos n , escolha um número inteiro n_1 tal que $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$. Como $x_n \in [a_2, b_2]$ para infinitos n , escolha um número inteiro $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$. (Observe que para fazer uma subsequência é crucial que $n_2 > n_1$, e é por isso que precisávamos insistir que $x_n \in [a_2, b_2]$ para infinitos n .) Continuando desta maneira, deveremos ser capazes de construir uma subsequência (x_{n_k}) que irá convergir para c . Você pode fornecer os detalhes no seguinte problem. ■

Problema 10.21 Transforme as ideias do esboço acima em uma proof formal do theorem de Bolzano-Weierstrass. □

Problema 10.22 Use o theorem de Bolzano-Weierstrass para completar a proof de theorem ?? □

10.4 O theorem do Supremo e do Valor Extremo

theorem ?? diz que uma função contínua em um intervalo fechado e limitado deve ser limitada. A limitação, por si só, não garante a existência de um máximo ou de um mínimo. Devemos também ter um intervalo fechado e limitado. Para ilustrar isso, considere a função contínua $f(x) = \tan^{-1}x$ definida no intervalo (ilimitado) $(-\infty, \infty)$.



Esta função é limitada entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, mas não atinge um máximo ou mínimo

como as linhas $y = \pm \frac{\pi}{2}$ são assíntotas horizontais. Observe que se restringíssemos o domínio a um intervalo fechado e limitado, então ele atingiria seus valores extremos nesse intervalo (conforme garantido pela **EVT**).

Para encontrar o máximo, precisamos encontrar o menor limite superior possível para o contradomínio da função. Isso solicita as seguintes definições.

Definição 10.23 Seja $S \subseteq \mathbb{R}$ e seja b um número real. Dizemos que b é um limite superior de S desde $b \geq x$ para todo $x \in S$. $\diamond$

Por exemplo, se $S = (0, 1)$, então qualquer b com $b \geq 1$ seria um limite superior de S . Além disso, o fato de b não ser um elemento do conjunto S é irrelevante. Na verdade, se $T = [0, 1]$, então qualquer b com $b \geq 1$ ainda seria um limite superior de T . Observe que, em geral, se um conjunto tem um limite superior, então ele tem infinitos, pois qualquer número maior que esse limite superior também seria um limite superior. No entanto, há algo especial no menor limite superior.

Definição 10.24 Propriedade do limite mínimo superior (LUBP). Seja $S \subseteq \mathbb{R}$ e seja b um número real. Dizemos que b é o *menor limite superior* de S desde que

- (a) $b \geq x$ para todo $x \in S$. (b é um limite superior de S)
- (b) Se $c \geq x$ para todo $x \in S$, então $c \geq b$. (Qualquer limite superior de S é pelo menos tão grande quanto b .)

Neste caso, também dizemos que b é o *supremo* de S e escrevemos

$$b = \sup(S).$$

$\diamond$

Observe que a definição realmente diz que b é o menor limite superior de S . Observe também que a segunda condição pode ser substituída pela sua contrapositiva, então podemos dizer que $b = \sup S$ se e somente se

- (a) (i).
 $b \geq x$ para todos $x \in S$
- (b) (ii).
Se $c < b$ então existe $x \in S$ tal que $c < x$.

A segunda condição diz que se um número c for menor que b , então ele não pode ser um limite superior, de modo que b é realmente o menor limite superior.

Observe também que o supremo do conjunto pode ou não estar no próprio conjunto. Isso é ilustrado pelos exemplos acima, como em ambos os casos, $1 = \sup(0, 1)$ e $1 = \sup[0, 1]$. Obviamente, um conjunto que não é limitado acima, como $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ não pode ter um supremo. No entanto, para conjuntos não vazios limitados acima, temos o seguinte.

Teorema 10.25 A propriedade do limite mínimo superior (LUBP). *Seja S um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ que é limitado acima. Então S tem um supremo.*

Esboço da proof. Como $S \neq \emptyset$, então existe $s \in S$. Como S é limitado acima, então ele tem um limite superior, digamos b . Vamos nos preparar para usar a propriedade Nested Interval. Com isso em mente, sejam $x_1 = s$ e $y_1 = b$ e observe que $\exists x \in S$ tal que $x \geq x_1$ (ou seja, x_1 em si) e $\forall x \in S, y_1 \geq x$. Você proofvelmente adivinhou o que vem a seguir: seja m_1 o ponto médio de

$[x_1, y_1]$. Observe que $m_1 \geq x$, $\forall x \in S$ ou $\exists x \in S$ tal que $x \geq m_1$. No primeiro caso, renomeamos, deixando $x_2 = x_1$ e $y_2 = m_1$. Neste último caso, deixamos $x_2 = m_1$ e $y_2 = y_1$. Em ambos os casos, terminamos com $x_1 \leq x_2 \leq y_2 \leq y_1$, $y_2 - x_2 = \frac{1}{2}(y_1 - x_1)$, e $\exists x \in S$ tal que $x \geq x_2$ e $\forall x \in S$, $y_2 \geq x$. Se continuarmos este processo, terminaremos com duas sequências, (x_n) e (y_n) , satisfazendo as seguintes condições:

1. $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$
2. $y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq \dots$
3. $\forall n, x_n \leq y_n$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} (y_1 - x_1) = 0$
5. $\forall n, \exists x \in S$ tal que $x \geq x_n$ e $\forall x \in S$, $y_n \geq x$,

Pelas propriedades 1-5 e o NIP existe c tal que $x_n \leq c \leq y_n$, $\forall n$. Deixaremos para você usar a propriedade 5 para mostrar que $c = \sup S$. ■

Problema 10.26 Complete as ideias acima para fornecer uma proof formal de [theorem 10.25](#). □

Observe que realmente usamos o fato de que S não era vazio e era limitado acima na proof de [theorem 10.25](#). Isto faz sentido, uma vez que um conjunto que não é limitado acima não pode ter um limite mínimo superior. Na verdade, qualquer número real é um limite superior do conjunto vazio, de modo que o conjunto vazio não teria um limite superior mínimo.

O seguinte corolário para [theorem 10.25](#) pode ser muito útil.

Corolário 10.27 *Seja (x_n) uma sequência limitada e crescente de números reais. Ou seja, $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$. Então (x_n) converge para algum número real c .*

Problema 10.28 Prove [Corolário 10.27](#).

Hint. Deixe $c = \sup\{x_n | n = 1, 2, 3, \dots\}$. Para mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$, seja $\epsilon > 0$. Observe que $c - \epsilon$ não é um limite superior. Você tira daqui! □

Problema 10.29 Considere a seguinte expressão curiosa

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots}}}}$$

Usaremos [Corollary 10.27](#) para mostrar que isso realmente converge para algum número real. Depois de sabermos que converge, podemos realmente calcular o que é. É claro que, para fazer isso, precisamos definir as coisas com um pouco mais de precisão. Com isso em mente, considere a seguinte sequência (x_n) definida como segue:

$$x_1 = \sqrt{2}$$

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}.$$

- (a) Use indução para mostrar que $x_n < 2$ para $n = 1, 2, 3, \dots$
- (b) Use o resultado da parte (a) para mostrar que $x_n < x_{n+1}$ para $n = 1, 2, 3, \dots$
- (c) De [Corollary 10.27](#), temos que (x_n) deve convergir para algum número c . Use o fato de que (x_{n+1}) também deve convergir para c para calcular o que c deve ser.

□

Agora temos todas as ferramentas necessárias para enfrentar o theorem do Valor Extremo.

Teorema 10.30 theorem do Valor Extremo (EVT)

Suponha que f seja contínuo em $[a, b]$. Então existe $c, d \in [a, b]$ tal que $f(d) \leq f(x) \leq f(c)$, para todo $x \in [a, b]$.

Esboço da proof. Mostraremos primeiro que f atinge seu máximo. Para este end, lembre-se que theorem ?? nos diz que $f[a, b] = \{f(x) | x \in [a, b]\}$ é um conjunto limitado. Pelo LUBP, $f[a, b]$ deve ter um limite superior mínimo que rotularemos como s , de modo que $s = \sup f[a, b]$. Isso diz que $s \geq f(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Tudo o que precisamos fazer agora é encontrar um $c \in [a, b]$ com $f(c) = s$. Com isso em mente, observe que como $s = \sup f[a, b]$, então para qualquer número inteiro positivo n , $s - \frac{1}{n}$ não é um limite superior de $f[a, b]$. Assim existe $x_n \in [a, b]$ com $s - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq s$. Agora, pelo theorem de Bolzano-Weierstrass, (x_n) tem uma subsequência convergente (x_{n_k}) convergindo para algum $c \in [a, b]$. Usando a continuidade de f em c , você deve ser capaz de mostrar que $f(c) = s$. Para encontrar o mínimo de f , encontre o máximo de $-f$. ■

Problema 10.31 Formalize as ideias acima em uma proof de Theorem ??. □

Observe que usamos o NIP para proofr tanto o theorem de Bolzano-Weierstrass quanto o LUBP. Isto é realmente inevitável, pois todas essas afirmações são equivalentes no sentido de que qualquer uma delas pode ser tomada como o axioma da completude para o sistema de números reais e as outras proofdas como theorems. Isto não é incomum na matemática, pois as pessoas tendem a gravitar em torno de ideias que se adequam ao problem específico em que estão trabalhando. Nesse caso, as pessoas perceberam em algum momento que precisavam de algum tipo de propriedade de completude para o sistema de números reais proofr vários theorems. A formulação de completude de cada indivíduo se ajusta à sua compreensão do problem em questão. Somente retrospectivamente vemos que eles estavam realmente falando sobre o mesmo conceito: a completude do sistema de números reais. Na verdade, a maioria dos livros didáticos modernos usa o LUBP como o axioma da completude e proof todas as outras formulações como theorems. Terminaremos esta seção mostrando que tanto o theorem de Bolzano-Weierstrass quanto o LUBP podem ser usados para proofr o NIP. Isso diz que todos são equivalentes e que qualquer um deles poderia ser tomado como o axioma da completude.

Problema 10.32 Use o theorem de Bolzano-Weierstrass para proofr o NIP. Ou seja, suponha que o theorem de Bolzano-Weierstrass seja válido e suponha que temos duas sequências de números reais, (x_n) e (y_n) , satisfazendo:

1. $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$
2. $y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq \dots$
3. $\forall n, x_n \leq y_n$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$.

Prove que existe um número real c tal que $x_n \leq c \leq y_n$, para todo n . □

Como o theorem de Bolzano-Weierstrass e a Propriedade do Intervalo Aninhado são equivalentes, segue-se que o theorem de Bolzano-Weierstrass não funcionará para o sistema de números racionais.

Problema 10.33 Encontre uma sequência limitada de números racionais tal que nenhuma subsequência dela convirja para um número racional. □

Problema 10.34 Use a propriedade do limite mínimo superior para provar a propriedade do intervalo aninhado. Isto é, suponha que todo subconjunto não vazio dos números reais limitado acima tenha um limite mínimo superior; e suponha que temos duas sequências de números reais (x_n) e (y_n) , satisfazendo:

1. $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$
2. $y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq \dots$
3. $\forall n, x_n \leq y_n$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$.

Prove que existe um número real c tal que $x_n \leq c \leq y_n$, para todo n . (Novamente, o c será, necessariamente, único, mas não se preocupe com isso.)

Dica. [Corollary 10.27](#) pode funcionar bem aqui. $\square$

Problema 10.35 Como a LUBP é equivalente ao NIP, ela não é válida para o sistema de números racionais. Demonstre isso encontrando um conjunto não vazio de números racionais que é limitado acima, mas cujo supremo é um número irracional. $\square$

Temos o maquinário instalado para resolver um assunto que foi introduzido em [Chapter 3](#). Se você se lembra (ou olha para trás), introduzimos a Propriedade de Arquimedes do sistema de números reais. Esta propriedade diz que dados quaisquer dois números reais positivos a, b , existe um inteiro positivo n com $na > b$. Como mencionamos em [Chapter 3](#), isso foi considerado intuitivamente óbvio. A analogia que usamos foi esvaziar um oceano b com uma colher de chá a , desde que estejamos dispostos a usá-la vezes suficientes n . A completude do sistema de números reais permite-nos prová-lo como um theorem formal.

Teorema 10.36 Propriedade arquimediana de $\mathbb{R}$

Dados quaisquer números reais positivos a e b , existe um inteiro positivo n , tal que $na > b$.

Problema 10.37 prove Theorem ??.

Dica. Suponha que existam números reais positivos a e b , tais que $na \leq b$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Então $\mathbb{N}$ seria limitado acima por b/a . Seja $s = \sup(\mathbb{N})$ e considere $s - 1$. $\square$

Dado o que temos feito, pode-se perguntar se a Propriedade de Arquimedes é equivalente ao LUBP (e, portanto, poderia ser tomada como um axioma). A resposta está no seguinte problem.

Problema 10.38 $\mathbb{Q}$ satisfaz a Propriedade de Arquimedes e o que isso tem a ver com a questão de tomar a Propriedade de Arquimedes como um axioma de completude? $\square$

10.5 problems Adicionais

Problema 10.39 Imitar as definições de um limite superior de um conjunto e o limite inferior mínimo (supremo) de um conjunto para fornecer definições para um limite inferior de um conjunto e o maior limite inferior (ínendo) de um conjunto.

Nota: O ínendo de um conjunto S é denotado por $\inf(S)$. $\square$

Problema 10.40 Encontre o menor limite superior (supremo) e o maior limite inferior (ínendo) dos seguintes conjuntos de números reais, se existirem. (Se não existir, diga-o.)

- (a) $S = \{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$
- (b) $T = \{r \mid r \text{ é racional e } r^2 < 2\}$
- (c) $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$
- (d) $R = \{\frac{(-1)^n}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$
- (e) $(2, 3\pi] \cap \mathbb{Q}$
- (f) O conjunto vazio $\emptyset$

□

Problema 10.41 Seja $S \subseteq \mathbb{R}$ e seja $T = \{-x \mid x \in S\}$.

- (a) Prove que b é um limite superior de S se e somente se $-b$ for um limite inferior de T .
- (b) Prove que $b = \sup S$ se e somente se $-b = \inf T$.

□

Capítulo 11

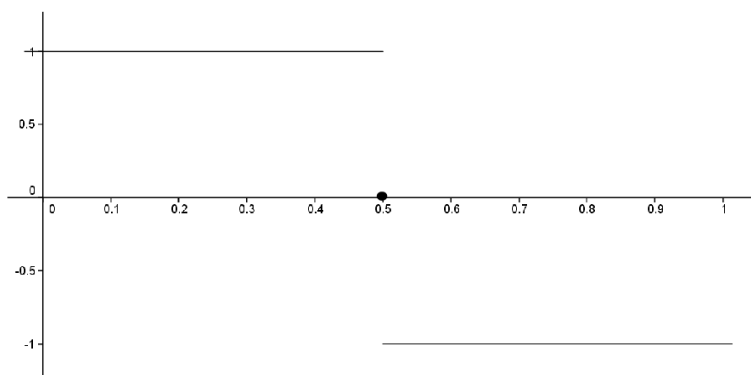
Voltar à série Power

11.1 Convergência Uniforme

Desenvolvemos definições analíticas precisas da convergência de uma sequência e da continuidade de uma função e as usamos para provar o EVT e o IVT para uma função contínua. Vamos agora voltar a nossa atenção para a questão que motivou originalmente estas definições: “Porque é que as séries de Taylor se comportam bem, mas as séries de Fourier não o são necessariamente?” foi contínuo. Além disso, se diferenciarmos ou integrarmos estas séries termo a termo, então a série resultante convergirá para a derivada ou integral da série original. Este nem sempre foi o caso das séries de Fourier. Por exemplo considere a função

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4}{\pi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos((2k+1)\pi x) \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\cos(\pi x) - \frac{1}{3} \cos(3\pi x) + \frac{1}{5} \cos(5\pi x) - \dots \right). \end{aligned}$$

Vimos que o gráfico de f é dado por



Se considerarmos a seguinte sequência de funções

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{4}{\pi} \cos(\pi x) \\ f_2(x) &= \frac{4}{\pi} \left(\cos(\pi x) - \frac{1}{3} \cos(3\pi x) \right) \\ f_3(x) &= \frac{4}{\pi} \left(\cos(\pi x) - \frac{1}{3} \cos(3\pi x) + \frac{1}{5} \cos(5\pi x) \right) \end{aligned}$$

⋮

vemos a sequência de funções contínuas (f_n) converge para a função não contínua f para cada número real x . Isso não aconteceu com a série Taylor. As somas parciais de uma série de Taylor eram polinômios e, portanto, contínuas, mas para onde convergiam também era contínua.

A dificuldade é bastante delicada e os matemáticos demoraram um pouco para determinar o problema. Existem duas maneiras muito sutilmente diferentes pelas quais uma sequência de funções pode convergir: pontualmente ou uniformemente. Esta distinção foi abordada por Niels Henrik Abel (1802-1829) em 1826 enquanto estudava o domínio de convergência de uma série de potências. No entanto, as definições formais necessárias não foram explicitadas até que Weierstrass o fez em seu artigo de 1841 *Zur Theorie der Potenzreihen* (*Sobre a Teoria das Séries de Potências*). Isto foi publicado em suas obras coletadas em 1894.

Será instrutivo dar uma olhada em um argumento que não funciona bem antes de examinar as definições formais de que precisaremos. Em 1821 Augustin Cauchy “provou” que a soma infinita de funções contínuas é contínua. Claro, é óbvio (para nós) que isto não é verdade porque vimos vários contra-exemplos. Mas Cauchy, que era um matemático de primeira linha, estava tão certo da correção de seu argumento que o incluiu em seu livro de análise, *Cours d'analyse* (1821).

Problema 11.1 Encontre a falha na seguinte “prova” de que f também é contínuo em a .

Suponha que $f_1, f_2, f_3, f_4 \dots$ sejam todos contínuos em a e que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$. Seja $\varepsilon > 0$. Como f_n é contínuo em a , podemos escolher $\delta_n > 0$ tal que se $|x - a| < \delta_n$, então $|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Seja $\delta = \inf(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots)$. Se $|x - a| < \delta$ então

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x) - f_n(a)) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_n(a)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} \\ &\leq \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim f é contínuo em a . □

Definição 11.2 Seja S um subconjunto do sistema de números reais e seja $(f_n) = (f_1, f_2, f_3, \dots)$ seja uma sequência de funções definidas em S . Seja f uma função definida em S também. Dizemos que (f_n) **converge para f pontualmente em S** desde que para todo $x \in S$, a sequência de números reais $(f_n(x))$ converge para o número $f(x)$. Neste caso escrevemos $f_n \xrightarrow{ptwise} f$ em S . ◇

Simbolicamente, temos $f_n \xrightarrow{ptwise} f$ on $S \Leftrightarrow \forall x \in S, \forall \varepsilon > 0, \exists N$ tal que

$(n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$.

Este é o tipo de convergência que temos observado até agora. Por outro lado, temos a seguinte nova definição.

Definição 11.3 Seja S um subconjunto do sistema de números reais e seja $(f_n) = (f_1, f_2, f_3, \dots)$ ser uma sequência de funções definidas em S . Seja f uma função definida em S também. Dizemos que (f_n) **converge para f uniformemente em S** desde que $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tal que $n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in S$.

Neste caso escrevemos $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ em S . ◇

A diferença entre essas duas definições é sutil. Na convergência pontual, recebemos um $x \in S$ fixo e um $\varepsilon > 0$. Então a tarefa é encontrar um N que funcione para aquele x e ε específicos. Na convergência uniforme, é dado $\varepsilon > 0$ e deve-se encontrar um único N que funcione para aquele ε específico, mas também simultaneamente (uniformemente) para todo $x \in S$. A convergência claramente uniforme implica convergência pontual como um N que funciona uniformemente para todos x , funciona também para cada indivíduo x . Contudo, o inverso não é verdadeiro. Isso ficará evidente, mas primeiro considere o seguinte exemplo.

Problema 11.4 Seja $0 < b < 1$ e considere a sequência de funções (f_n) definida em $[0, b]$ por $f_n(x) = x^n$. Use a definição para mostrar que $f_n \xrightarrow{\text{unif}} 0$ em $[0, b]$.

Dica. $|x^n - 0| = x^n \leq b^n$. □

A convergência uniforme não depende apenas da sequência de funções, mas também do conjunto S . Por exemplo, a sequência $(f_n(x)) = (x^n)_{n=0}^{\infty}$ de [Problema 11.4](#) não converge uniformemente em $[0, 1]$. Poderíamos usar a negação da definição para provar isso, mas em vez disso, será uma consequência do seguinte teorema.

Teorema 11.5 Considere uma sequência de funções (f_n) que são todas contínuo em um intervalo I . Suponha $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ em I . Então f deve ser contínuo em I .

Esboço da prova. Seja $a \in I$ e seja $\varepsilon > 0$. A ideia é usar a convergência uniforme para substituir f por uma das funções contínuas conhecidas f_n . Especificamente, cancelando o cancelamento, podemos escrever

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \end{aligned}$$

Se escolhermos n suficientemente grande, então poderemos tornar o primeiro e o último termos tão pequenos quanto desejarmos, observando que a convergência uniforme torna o primeiro termo uniformemente pequeno para todo x . Assim que tivermos um n específico, então podemos usar a continuidade de f_n para encontrar um $\delta > 0$ tal que o termo do meio seja pequeno sempre que x estiver dentro de δ de a . ■

Problema 11.6 Forneça uma prova formal de [Teorema 11.5](#) com base nas ideias acima. □

Problema 11.7 Considere a sequência de funções (f_n) definido em $[0, 1]$ por $f_n(x) = x^n$. Mostre que a sequência converge para a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{if } x = 1 \end{cases}$$

pontualmente em $[0, 1]$, mas não uniformemente em $[0, 1]$. □

Observe que para a série de Fourier no início deste capítulo,

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{1}{3} \cos(3\pi x) + \frac{1}{5} \cos(5\pi x) - \frac{1}{7} \cos(7\pi x) + \dots \right)$$

a convergência não pode ser uniforme em $(-\infty, \infty)$, pois a função f não é contínua. Isso nunca acontece com uma série de potências, pois elas convergem para funções contínuas sempre que convergem. Veremos também que a convergência uniforme é o que nos permite integrar e diferenciar uma série de potências termo a termo.

11.2 Convergência Uniforme: Integrais e Derivadas

Vimos na seção anterior que se (f_n) é uma sequência de funções contínuas que converge uniformemente para f em um intervalo, então f deve ser contínua no intervalo também. Isso não era necessariamente verdade se a convergência fosse apenas pontual, pois vimos uma sequência de funções contínuas definidas em $(-\infty, \infty)$ convergindo pontualmente para uma série de Fourier que não era contínua na reta real. A convergência uniforme também garante algumas outras propriedades interessantes.

Teorema 11.8 *Suponha que f_n e f sejam integráveis e $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ em $[a, b]$. Então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x=a}^b f_n(x) dx = \int_{x=a}^b f(x) dx.$$

Problema 11.9 Prove Teorema ??.

Hint. Para $\varepsilon > 0$, precisamos fazer $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, para todos $x \in [a, b]$. $\square$

Observe que este teorema não é verdadeiro se a convergência for apenas pontual, conforme ilustrado a seguir.

Problema 11.10 Considere a sequência de funções (f_n) dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{if } x \in (0, \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

(a) Mostre que $f_n \xrightarrow{\text{ptwise}} 0$ em $[0, 1]$, mas $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x=0}^1 f_n(x) dx \neq \int_{x=0}^1 0 dx$.

(b) A convergência pode ser uniforme? Explicar. $\square$

Aplicando este resultado a séries de potências, temos o seguinte.

Observe que devemos assumir explicitamente a convergência uniforme. Isso ocorre porque ainda não provamos que as séries de potências realmente convergem uniformemente.

Corolário 11.11 *Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente para f em um intervalo contendo 0 e x então $\int_{t=0}^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \right)$.*

Problema 11.12 Prove [Corollary 11.11](#).

Hint. Lembre-se disso

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N f_n(x).$$

□

Surpreendentemente, a questão da diferenciação termo a termo não depende da convergência uniforme de (f_n) , mas da convergência uniforme de (f'_n) . Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 11.13 *Suponha que para todo $n \in \mathbb{N}$ f_n seja diferenciável, f'_n seja contínuo, $f_n \xrightarrow{\text{ptwise}} f$, e $f'_n \xrightarrow{\text{unif}} g$ em um intervalo, I . Então f é diferenciável e $f' = g$ em I .*

Problema 11.14 Prove Theorem ??.

Dica. Seja a um ponto fixo arbitrário em I e seja $x \in EU$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_{t=a}^x f'_n(t) dt = f_n(x) - f_n(a).$$

Pegue o limite de ambos os lados e diferencie em relação a x .

□

Como antes, aplicar isso a séries de potências dá o seguinte resultado:

Corolário 11.15 *Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge pontualmente para f em um intervalo contendo 0 e x e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ converge uniformemente em um intervalo contendo 0 e x , então $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$.*

Problema 11.16 Prove Corollary 11.15.

□

Os resultados acima dizem que uma série de potências pode ser diferenciada e integrada termo a termo, desde que a convergência seja uniforme. Felizmente é, em geral, verdade que quando uma série de potências converge, a convergência dela e das suas séries integradas e diferenciadas também é uniforme (quase).

No entanto, ainda não temos todas as ferramentas necessárias para ver isso. Para construir essas ferramentas é necessário retornar brevemente ao nosso estudo, iniciado no Capítulo 7, da convergência de sequências.

11.2.1 Sequências de Cauchy

Saber que uma sequência ou série converge e saber para onde ela converge são normalmente duas questões diferentes. Por exemplo, sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! n!}$ ambos convergem. A primeira converge para e , que tem significado em outros contextos. Não sabemos para onde o segundo converge, a não ser dizer que converge para $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! n!}$. Na verdade, essa questão pode não ter muito significado sem algum outro contexto em que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! n!}$ surge naturalmente. Seja como for, precisamos olhar para a convergência de uma série (ou de uma sequência) sem necessariamente saber para onde ela pode convergir. Fazemos a seguinte definição.

Definição 11.17 Seja (s_n) uma sequência de números reais. Dizemos que (s_n) é uma **sequência de Cauchy** se para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um número real N tal que se $m, n > N$, então $|s_m - s_n| < \varepsilon$.

◇

Observe que esta definição diz que os termos de uma sequência de Cauchy aproximam-se arbitrariamente uns dos outros e que não há referência à aproximação de qualquer número real fixo específico. Além disso, você já viu muitos exemplos de sequências de Cauchy, conforme ilustrado pelo resultado a seguir.

Teorema 11.18 *Suponha que (s_n) seja uma sequência de números reais que converge para s . Então (s_n) é uma sequência de Cauchy.*

Intuitivamente, esse resultado faz sentido. Se os termos de uma sequência estão ficando arbitrariamente próximos de s , então eles deveriam estar arbitrariamente próximos um do outro. Esta é a base da prova.

Mas o inverso não é tão claro. Na verdade, isso não é verdade nos números racionais.

Problema 11.19 Prove Teorema ??.

Dica. $|s_m - s_n| = |s_m - s + s - s_n| \leq |s_m - s| + |s - s_n|$. □

Portanto, qualquer sequência convergente é automaticamente Cauchy. Para o sistema de números reais, o inverso também é verdadeiro e, de facto, é equivalente a qualquer um dos nossos axiomas de completude: o NIP, o Teorema de Bolzano-Weierstrass ou a Propriedade LUB. Assim, isto poderia ter sido tomado como o nosso axioma da completude e poderíamos tê-lo usado para provar os outros. Uma das maneiras mais convenientes de provar esta recíproca é usar o Teorema de Bolzano-Weierstrass. Para fazer isso, devemos primeiro mostrar que uma sequência de Cauchy deve ser limitada. Este resultado é uma reminiscência do fato de que uma sequência convergente é limitada (Lemma 7.21 de Chapter 7) e a prova é muito semelhante.

Lema 11.20 *Suponha que (s_n) é uma sequência de Cauchy. Então existe $B > 0$ tal que $|s_n| \leq B$ para todo n .*

Problema 11.21 Prove Lema 11.20.

Dica. Isso é semelhante a problem 7.22 de Chapter ??. Existe N tal que se $m, n > N$ então $|s_n - s_m| < 1$. Escolha um $m > N$ fixo e deixe $B = \max(|s_1|, |s_2|, \dots, |s_{\lceil N \rceil}|, |s_m| + 1)$. □

Teorema 11.22 Sequências de Cauchy convergem

Suponha que (s_n) seja uma sequência de Cauchy de números reais. Existe um número real s tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$.

Esboço da prova. Sabemos que (s_n) é limitado, então pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, tem uma subsequência convergente (s_{n_k}) convergindo para algum número real s . Temos $|s_n - s| = |s_n - s_{n_k} + s_{n_k} - s| \leq |s_n - s_{n_k}| + |s_{n_k} - s|$. Se escolhermos n e n_k grandes o suficiente, poderemos tornar cada termo arbitrariamente pequeno. ■

Problema 11.23 Forneça uma prova formal de Theorem ??. □

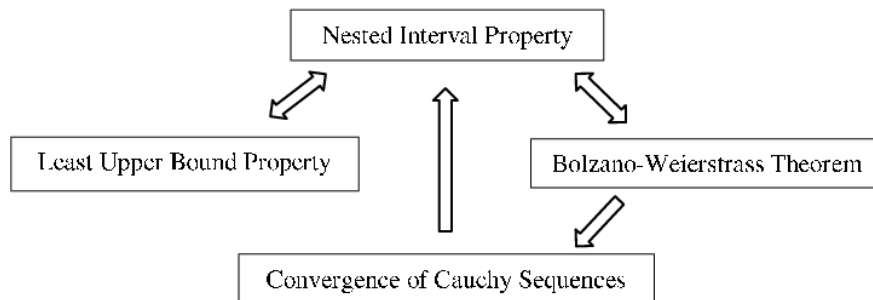
De Teorema ?? vemos que toda sequência de Cauchy converge em $\mathbb{R}$. Além disso, a prova deste facto depende do Teorema de Bolzano-Weierstrass que, como vimos, é equivalente ao nosso axioma da completude, a Propriedade do Intervalo Aninhado. O que isto significa é que se houver uma sequência de Cauchy que não converge, então o NIP não é verdadeiro. Uma pergunta natural a ser feita é se toda sequência de Cauchy converge, o NIP segue? Ou seja, a convergência das sequências de Cauchy também é equivalente ao nosso axioma da completude? O teorema a seguir mostra que a resposta é sim.

Teorema 11.24 *Suponha que toda sequência de Cauchy converge. Então a propriedade Nested Interval é verdadeira.*

Problema 11.25 Prove Teorema ??.

Hint. Se começarmos com duas sequências (x_n) e (y_n) , satisfazendo todas as condições do NIP, você deverá ser capaz de mostrar que ambas são sequências de Cauchy. □

[Problems 11.23](#) e [Problem 11.25](#) nos dizem que os seguintes são equivalentes: a propriedade do intervalo aninhado, o teorema de Bolzano-Weierstrass, a propriedade do limite mínimo superior e a convergência das sequências de Cauchy. Assim, qualquer um deles poderia ter sido tomado como o axioma da completude do sistema de números reais e então usado para provar cada um dos outros como um teorema de acordo com o seguinte gráfico de dependência:



Como podemos ir de qualquer nó do gráfico para qualquer outro, simplesmente seguindo as implicações (indicadas pelas setas), qualquer uma dessas afirmações é logicamente equivalente a cada uma das outras.

Problema 11.26 Como a convergência das sequências de Cauchy pode ser tomada como o axioma da completude para o sistema de números reais, ela não é válida para o sistema de números racionais. Dê um exemplo de uma sequência de Cauchy de números racionais que não converge para um número racional. $\square$

Se aplicarmos as ideias acima às séries, obteremos o seguinte resultado importante, que fornecerá a base para nossa investigação das séries de potências.

Teorema 11.27 Critério de Cauchy. A série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge se e somente se $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tal que se $m > n > N$ então $|\sum_{k=n+1}^m a_k| < \varepsilon$.

Problema 11.28 Prove o critério de Cauchy. $\square$

Neste ponto, vários dos testes de convergência que você provavelmente aprendeu em cálculo são facilmente comprovados. Por exemplo:

Problema 11.29 O n° Teste do Período

Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. $\square$

Problema 11.30 O critério forte de Cauchy. Mostre que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

se e somente se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = 0$.

Hint. A parte mais difícil deste problema é reconhecer que se trata realmente do limite de uma sequência como em [Chapter 7](#). $\square$

Você também pode se lembrar do Teste de Comparação do estudo de séries em cálculo: suponha que $0 \leq a_n \leq b_n$, se $\sum b_n$ converge então $\sum a_n$ converge. Este resultado decorre do fato de que as somas parciais de $\sum a_n$ formam uma sequência crescente que é limitada acima por $\sum b_n$. (Veja [Corolário 10.27 de Capítulo ??](#).) O Critério de Cauchy nos permite estender isso ao caso onde os termos a_n também podem ser negativos. Isso pode ser visto no seguinte teorema.

Teorema 11.31 Teste de Comparação

Suponha $|a_n| \leq b_n$ para todo n . Se $\sum b_n$ converge então $\sum a_n$ também

converge.

Problema 11.32 Prove Teorema 11.31.

Hint. Use o critério de Cauchy com o fato de que $|\sum_{k=n+1}^m a_k| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k|$. $\square$

A definição a seguir é de grande importância no estudo de séries.

Definição 11.33 Convergência Absoluta

Dada uma série $\sum a_n$, a série $\sum |a_n|$ é chamada de {série absoluta} de $\sum a_n$ e se $\sum |a_n|$ converge então dizemos que $\sum a_n$ converge absolutamente. $\diamond$

O significado desta definição vem do seguinte resultado.

Corolário 11.34 Se $\sum a_n$ converge absolutamente, então $\sum a_n$ converge.

Problema 11.35 Mostre que Corollary 11.34 é uma consequência direta de Teorema 11.31. $\square$

Problema 11.36 Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = s$, então segue-se que $s = |\sum_{n=0}^{\infty} a_n|$? Justifique sua resposta. O que pode ser dito? $\square$

O inverso de Corollary 11.34 não é verdadeiro, como evidenciado pela série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$. Como observamos em Capítulo 5, esta série converge para $\ln 2$. No entanto, sua série absoluta é a Série Harmônica que diverge. Qualquer série desse tipo que converge, mas não absolutamente, é dita **convergir condicionalmente**. Lembre-se também que em Chapter 5, mostramos que poderíamos reorganizar os termos da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ para fazê-la convergir para qualquer número que desejássemos. Notamos ainda que todos os rearranjos da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ convergiram para o mesmo valor. A diferença entre as duas séries é que a última converge absolutamente, enquanto a primeira não. Especificamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 11.37 Suponha que $\sum a_n$ converge absolutamente e seja $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Então qualquer rearranjo de $\sum a_n$ deve convergir para s .

Esboço da Prova. Primeiro mostraremos que este resultado é verdadeiro no caso em que $a_n \geq 0$. Se $\sum b_n$ representa um rearranjo de $\sum a_n$, então observe que a sequência de somas parciais $(\sum_{k=0}^n b_k)_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência crescente que é limitada por s . Por Corollary 10.27 de Chapter 10, esta sequência deve convergir para algum número t e $t \leq s$. Além disso, $\sum a_n$ também é um rearranjo de $\sum b_n$. Portanto, o resultado vale para este caso especial. (Por quê?) Para o caso geral, observe que $a_n = \frac{|a_n|+a_n}{2} - \frac{|a_n|-a_n}{2}$ e que $\sum \frac{|a_n|+a_n}{2}$ e $\sum \frac{|a_n|-a_n}{2}$ são ambas séries convergentes com termos não negativos. Pelo caso especial $\sum \frac{|b_n|+b_n}{2} = \sum \frac{|a_n|+a_n}{2}$ e $\sum \frac{|b_n|-b_n}{2} = \sum \frac{|a_n|-a_n}{2}$. $\blacksquare$

Problema 11.38 Preencha os detalhes e forneça uma prova formal de Theorem 11.37. $\square$

11.3 Raio de Convergência de uma Série de Potências

Desenvolvemos maquinário suficiente para observar a convergência de séries de potências. O resultado fundamental é o seguinte teorema devido a Abel.

Teorema 11.39 Suponha que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ converge para algum número real diferente de zero c . Então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente para todo x tal que $|x| < |c|$.

Para provar [Teorema 11.39](#) primeiro observe que por [Problem 11.29](#), $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c^n = 0$. Assim, $(a_n c^n)$ é uma sequência limitada. Seja B um limite: $|a_n c^n| \leq B$. Então

$$|a_n x^n| = \left| a_n c^n \cdot \left(\frac{x}{c} \right)^n \right| \leq B \left| \frac{x}{c} \right|^n.$$

Agora podemos usar o teste de comparação.

Problema 11.40 Prove [Theorem 11.39](#). □

Corolário 11.41 *Suponha que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ diverge para algum número real c . Então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverge para todo x tal que $|x| > |c|$.*

Problema 11.42 Prove [Corollary 11.41](#). □

Como resultado de [Theorem 11.39](#) e [Corollary 11.41](#), temos o seguinte: ou $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente para todo x ou existe algum número real não negativo r tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente quando $|x| < r$ e diverge quando $|x| > r$. No último caso, chamamos r de *raio de convergência* da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. No primeiro caso, dizemos que o raio de convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é ∞ . Embora possamos dizer que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente quando $|x| < r$, não podemos dizer que a convergência é uniforme. No entanto, podemos chegar perto. Podemos mostrar que a convergência é uniforme para $|x| \leq b < r$. Para ver isso, usaremos o seguinte resultado

Teorema 11.43 O teste de Weierstrass-M

Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções definidas em $S \subseteq \mathbb{R}$ e suponha que $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ seja uma sequência de números reais não negativos tais que

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \forall x \in S, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Se $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em S para alguma função (que denotaremos por $f(x)$).

Esboço da Prova. Como a característica crucial do teorema é a função $f(x)$ para a qual nossa série converge, nosso plano de ataque é primeiro definir $f(x)$ e então mostrar que nossa série, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, converge para ela uniformemente.

Primeiro observe que para qualquer $x \in S$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge pelo Teste de Comparação (na verdade, converge absolutamente) para algum número que denotaremos por $f(x)$. Isso realmente define a função $f(x)$ para todo $x \in S$. Segue-se que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge pontualmente para $f(x)$.

Em seguida, seja dado $\varepsilon > 0$. Observe que, como $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, digamos para M , então há um número real, N , tal que se $n > N$, então

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \right| = \left| M - \sum_{k=1}^n M_k \right| < \varepsilon.$$

Você deve ser capaz de usar isso para mostrar que se $n > N$, então

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in S.$$

■

Problema 11.44 Use as ideias acima para fornecer uma prova formal de [Theorem 11.43](#). □

Problema 11.45

- (a) Referindo-se a [equation \(II.1\)](#), mostre que a série de Fourier

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin((2k+1)\pi x)$$

converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

- (b) Sua série diferenciada converge uniformemente em $\mathbb{R}$? Explique.

□

Problema 11.46 Observe isso para todo $x \in [-1, 1]$ $|x| \leq 1$. Identifique qual das seguintes séries converge pontualmente e qual converge uniformemente no intervalo $[-1, 1]$. Em todos os casos, identifique a função limite.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n-1})$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^n - x^{n-1})}{n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^n - x^{n-1})}{n^2}$

□

Usando o teste de Weierstrass- M , podemos provar o seguinte resultado.

Teorema 11.47 Suponha que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tenha raio de convergência r (onde r poderia ser ∞ também). Seja b qualquer número real não negativo com $b < r$. Então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente em $[-b, b]$.

Problema 11.48 Prove [Teorema 11.47](#).

Hint. Sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n b^n|$ converge. Tudo isso deve estar configurado para o teste Weierstrass- M . □

Para terminar a história sobre a diferenciação e integração de séries de potências, tudo o que precisamos de fazer é mostrar que a série de potências, as suas séries integradas e as suas séries diferenciadas têm todas o mesmo raio de convergência. Talvez você não perceba, mas já sabemos que a série integrada tem um raio de convergência pelo menos tão grande quanto o raio de convergência da série original. Especificamente, suponha que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tenha um raio de convergência r e seja $|x| < r$. Sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente em um intervalo contendo 0 e x , e assim por [Corolário 11.11](#), $\int_{t=0}^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \right)$. Em outras palavras, a série integrada converge para qualquer x com $|x| < r$. Isto diz que o raio de convergência da série integrada deve ser pelo menos r .

Para mostrar que os raios de convergência são iguais, tudo o que precisamos mostrar é que o raio de convergência das séries diferenciadas também é pelo menos tão grande quanto r . Na verdade, como a série diferenciada da série integrada é a original, isso diria que a série original e a série integrada têm os mesmos raios de convergência. Colocando a série diferenciada no papel da série original, a série original é agora a série integrada e, portanto, estas também teriam os mesmos raios de convergência. Com isso em mente, queremos mostrar que se $|x| < r$, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ converge. A estratégia é imitar o que fizemos em [Theorem 11.39](#), onde essencialmente comparamos nossa série com uma série geométrica convergente. Só que desta vez precisamos começar com as séries geométricas diferenciadas.

Problema 11.49 Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ converge para $|x| < 1$.

Hint. Sabemos que $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Diferencie ambos os lados e tome o limite quando n se aproxima do infinito. $\square$

Teorema 11.50 Suponha que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tenha um raio de convergência r e seja $|x| < r$. Então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ converge.

Problema 11.51 Prove Teorema 11.50.

Hint. Seja b um número com $|x| < b < r$ e considere $|a_n n x^{n-1}| = \left| a_n b^n \cdot \frac{1}{b} \cdot n \left(\frac{x}{b}\right)^{n-1} \right|$. Você deve ser capaz de usar o teste de comparação e Problem 11.49. $\square$

11.4 Questões de limite e teorema de Abel

Resumindo nossos resultados, vemos que qualquer série de potências $\sum a_n x^n$ tem um raio de convergência r tal que $\sum a_n x^n$ converge absolutamente quando $|x| < r$ e diverge quando $|x| > r$. Além disso, a convergência é uniforme em qualquer intervalo fechado $[-b, b] \subset (-r, r)$ o que nos diz que tudo para o qual a série de potências converge deve ser uma função contínua em $(-r, r)$. Por último, se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ para $x \in (-r, r)$, então $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ para $x \in (-r, r)$ e $\int_{t=0}^x f(t) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ para $x \in (-r, r)$.

Assim, as séries de potências se comportam muito bem dentro de seu intervalo de convergência, e nossa abordagem descuidada de Chapter ?? é justificada, **EXCETO** para um problema. Se você voltar para Problem 4.25 de Chapter ??, você vê que usamos a série geométrica para obter a série, $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$. Substituímos $x = 1$ nisso para obter $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$. Infelizmente, nossa integração só foi garantida em um subintervalo fechado do intervalo $(-1, 1)$ onde a convergência era uniforme e substituímos em $x = 1$. Nós “dançamos na fronteira” também em outros lugares, inclusive quando dissemos que

$$\frac{\pi}{4} = \int_{x=0}^1 \sqrt{1-x^2} dx = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - j\right)}{n!} \right) \left(\frac{(-1)^n}{2n+1} \right).$$

O fato é que para uma série de potências $\sum a_n x^n$ com raio de convergência r , sabemos o que acontece para x com $|x| < r$ e x com $|x| > r$. Nunca falamos sobre o que acontece para x com $|x| = r$. Isso ocorre porque não existe uma abordagem sistemática para esse problema de fronteira. Por exemplo, considere as três séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

Eles estão todos relacionados porque começamos com a série geométrica e integramos duas vezes, portanto todos eles têm raio de convergência igual a 1. Seu comportamento na fronteira, ou seja, quando $x = \pm 1$, é outra história. A primeira série diverge quando $x = \pm 1$, a terceira série converge quando $x = \pm 1$. A segunda série converge quando $x = -1$ e diverge quando $x = 1$.

Mesmo com a imprevisibilidade de uma série de potências nos extremos do seu intervalo de convergência, o teste Weierstrass- M nos dá alguma esperança de convergência uniforme.

Problema 11.52 Suponha que a série de potências $\sum a_n x^n$ tenha raio de convergência r e a série $\sum a_n r^n$ converge absolutamente. Então $\sum a_n x^n$ converge uniformemente em $[-r, r]$.

Dica. Para $|x| \leq r$, $|a_n x^n| \leq |a_n r^n|$. $\square$

Infelizmente, este resultado não se aplica às integrais que mencionamos, pois a convergência nos extremos não é absoluta. No entanto, as integrações que realizamos em Chapter ?? ainda são legítimas. Isso se deve ao seguinte teorema de Abel, que estende a convergência uniforme aos extremos do intervalo de convergência, mesmo que a convergência em um extremo seja apenas condicional. Abel não utilizou o termo convergência uniforme, pois ainda não havia sido definido, mas as ideias envolvidas são dele.

Teorema 11.53 Teorema de Abel

Suponha que a série de potências $\sum a_n x^n$ tenha raio de convergência r e a série $\sum a_n r^n$ converge. Então $\sum a_n x^n$ converge uniformemente em $[0, r]$.

A prova disso não é intuitiva, mas envolve uma técnica inteligente conhecida como Fórmula de Soma Parcial de Abel.

Lema 11.54 Deixar

$$a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$$

sejam números reais e sejam $A_m = \sum_{k=1}^m a_k$. Então

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{j=1}^{n-1} A_j (b_j - b_{j+1}) + A_n b_n.$$

Problema 11.55 Prove [Lema 11.54](#).

Hint. Para $j > 1$, $a_j = A_j - A_{j-1}$. □

Lema 11.56 Lema de Abel

Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ números reais com $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$ e deixe $A_m = \sum_{k=1}^m a_k$. Suponha $|A_m| \leq B$ para todo m . Então $|\sum_{j=1}^n a_j b_j| \leq B \cdot b_1$.

Problema 11.57 Prove [Lema 11.56](#). □

Problema 11.58 Prove Teorema ??.

Hint. Seja $\epsilon > 0$. Como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ converge então pelo Critério de Cauchy, existe N tal que se $m > n > N$ então $|\sum_{k=n+1}^m a_k r^k| < \frac{\epsilon}{2}$. Seja $0 \leq x \leq r$. Por [Lema 11.56](#),

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k x^k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^m a_k r^k \left(\frac{x}{r} \right)^k \right| \leq \left(\frac{\epsilon}{2} \right) \left(\frac{x}{r} \right)^{n+1} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim para $0 \leq x \leq r$, $n > N$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=n+1}^m a_k x^k \right| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.]$$

□

Corolário 11.59 Suponha que a série de potências $\sum a_n x^n$ tenha raio de convergência r e a série $\sum a_n (-r)^n$ converge. Então $\sum a_n x^n$ converge uniformemente em $[-r, 0]$.

Problema 11.60 Prove [Corolário 11.59](#).

Dica. Considerar $\sum a_n (-x)^n$. □

Capítulo 12

De volta aos números reais

Como vimos, quando convergem, as séries de potências comportam-se muito bem e as séries de Fourier (trigonométricas) não necessariamente. O fato de as séries trigonométricas serem tão interessantes fez delas um pára-raios para o estudo matemático no final do século XIX.

Por exemplo, considere a questão da singularidade. Vimos em [Chapter 8](#) que se uma função pudesse ser representada por uma série de potências, então essa série deveria ser a série de Taylor. Mais precisamente, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \text{ então } a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Mas o que pode ser dito sobre a singularidade de uma série trigonométrica? Se pudermos representar uma função f como uma série trigonométrica geral

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x),$$

então esta deve ser a série de Fourier com os coeficientes determinados por Fourier?

Por exemplo, se $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x)$ converge para f uniformemente no intervalo $(0, 1)$, então por causa da convergência uniforme, a integração termo a termo de Fourier que vimos em [Part ??](#) é perfeitamente legítimo e os coeficientes são, necessariamente, os coeficientes que ele calculou. Contudo, vimos que a convergência de uma série de Fourier não precisa ser uniforme. Isso não significa que não possamos integrar termo a termo, mas diz que não podemos ter certeza de que a integração termo a termo de uma série de Fourier produzirá a integral da função associada.

Isso levou a uma generalização da integral por Henri Lebesgue em 1905. O trabalho profundo de Lebesgue resolveu a questão de saber se uma série trigonométrica convergente pontual limitada é ou não a série de Fourier de um função, mas não iremos nessa direção. Em vez disso, concentrar-nos-emos no trabalho que Georg Cantor realizou nos anos anteriores. O trabalho de Cantor também foi profundo e teve implicações de longo alcance na matemática moderna. Também leva a algumas conclusões muito estranhas.

‘Estranho’ não significa falso. Significa simplesmente que alguns dos resultados de Cantor podem ser difíceis de aceitar, mesmo depois de ter visto a prova e verificado a sua validade.

Para começar, vamos suprimir a função subjacente e supor que temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a'_n \cos n\pi x + b'_n \sin n\pi x).$$

Perguntamos: Se essas duas séries são iguais, deve ser verdade que $a_n = a'_n$ e $b_n = b'_n$? Podemos reformular esta questão de unicidade da seguinte forma: Suponha que

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((a_n - a'_n) \cos n\pi x + (b_n - b'_n) \sin n\pi x) = 0 \text{ texto}.$$

Se deixarmos $c_n = a_n - a'_n$ e $d_n = b_n - b'_n$, então a questão se torna: Se $\sum_{n=0}^{\infty} (c_n \cos n\pi x + d_n \sin n\pi x) = 0$, então $c_n = d_n = 0$? Certamente parece razoável supor então, mas neste ponto temos experiência suficiente com somas infinitas para saber que precisamos ter muito cuidado ao confiar na intuição que aprimoramos em somas finitas.

A resposta a esta questão aparentemente básica leva a alguns resultados muito profundos. Em particular, a resposta a esta questão levou o matemático Georg Cantor (1845-1918) a estudar a composição do sistema de números reais. Isto, por sua vez, abriu a porta para a visão moderna da matemática do século XX. Em particular, Cantor provou o seguinte resultado em 1871 ([6], p. 305).

Teorema 12.1 Cantor

Se a série trigonométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_n \cos n\pi x + d_n \sin n\pi x) = 0,$$

“com exceção de certos valores de x ,” então todos os seus coeficientes desaparecem.

Nas suas tentativas de definir precisamente quais “certos valores” poderiam ser excepcionais, Cantor foi levado a examinar a natureza dos subconjuntos de números reais e, em última análise, a dar uma definição precisa do conceito de conjuntos infinitos e a definir uma aritmética de “números infinitos.” (Na verdade, ele os chamou de {números transfinitos} porque, por definição, os números são finitos.)

Como primeiro passo para identificar esses “certos valores”, Cantor provou o seguinte teorema, que afirmaremos, mas não provaremos.

Teorema 12.2 Cantor, (1870)

Se a série trigonométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_n \cos n\pi x + d_n \sin n\pi x) = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ então todos os seus coeficientes desaparecem.

Ele então estendeu isso para o seguinte:

Teorema 12.3 Cantor, (1871)

Se a série trigonométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_n \cos n\pi x + d_n \sin n\pi x) = 0,$$

para todos, exceto um número finito $x \in \mathbb{R}$, então todos os seus coeficientes desaparecem.

**Figure 12.4** Georg Cantor¹⁶

Observe que esta não é uma generalização trivial. Embora os pontos excepcionais sejam limitados a um número finito, este número ainda pode ser extraordinariamente grande. Ou seja, mesmo que a série dada acima diferísse de zero em $10^{10^{100000}}$ pontos distintos no intervalo $(0, 10^{10^{100000}})$ os coeficientes ainda desaparecem. Isso permanece verdadeiro mesmo se em cada um desses $10^{10^{100000}}$ pontos a série converge para $10^{10^{100000}}$. Isso é realmente notável quando você pensa dessa maneira.

Neste ponto, Cantor ficou mais interessado nesses pontos excepcionais do que no problema da série de Fourier com o qual havia começado. A próxima tarefa que ele se propôs foi ver quão geral poderia ser o conjunto de pontos excepcionais. Seguindo o exemplo de Cantor, fazemos as seguintes definições.

Definição 12.5 Seja $S \subseteq \mathbb{R}$ e seja a um número real. Dizemos que a é um **ponto limite** (ou um **ponto de acumulação**) de S se existe uma sequência (a_n) com $a_n \in S - \{a\}$ que converge para a . $\diamond$

Problema 12.6 Seja $S \subseteq \mathbb{R}$ e seja a um número real. Prove que a é um ponto limite de S se e somente se para cada $\varepsilon > 0$ a intersecção

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap S - \{a\} \neq \emptyset.$$

□

A definição a seguir vai ao cerne da questão.

Definição 12.7 Seja $S \subseteq \mathbb{R}$. O conjunto de todos os pontos limites de S é chamado de **conjunto derivado** de S . O conjunto derivado é denotado S' . $\diamond$

Não confunda o conjunto derivado de um conjunto com a derivada de uma função. São objetos completamente diferentes, apesar da semelhança tanto na linguagem quanto na notação. A única coisa que eles têm em comum é que foram de alguma forma “derivados” de outra coisa.

Problema 12.8 Determine o conjunto derivado, S' , de cada um dos seguintes conjuntos.

- (a) $S = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$
- (b) $S = \left\{ 0, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$
- (c) $S = (0, 1]$

¹⁶mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cantor/

- (d) $S = [0, 1/2) \cup (1/2, 1]$
- (e) $S = \mathbb{Q}$
- (f) $S = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$
- (g) $S = \mathbb{Z}$
- (h) Qualquer conjunto finito S .

□

Problema 12.9 Deixe $S \subseteq \mathbb{R}$.

- (a) Prove isso $(S')' \subseteq S'$.
- (b) Dê um exemplo onde esses dois conjuntos são iguais.
- (c) Dê um exemplo onde esses dois conjuntos não são iguais.

□

A noção de conjunto derivado constitui a base do conjunto excepcional de valores de Cantor. Especificamente, seja S novamente um conjunto de números reais e considere a seguinte sequência de conjuntos:

$$S' \supseteq (S')' \supseteq ((S')')' \supseteq \cdots$$

Cantor mostrou que se, em algum momento, um desses conjuntos derivados estiver vazio, então a propriedade de unicidade ainda é válida. Especificamente, temos:

Teorema 12.10 Cantor, (1871)

Seja S um subconjunto dos números reais com a propriedade de que um de seus conjuntos derivados é vazio. Então se a série trigonométrica $\sum_{n=0}^{\infty} (c_n \cos n\pi x + d_n \sin n\pi x)$ é zero para todo $x \in \mathbb{R} - S$, então todos os coeficientes da série desaparecem.

12.1 Conjuntos infinitos

O teorema a seguir segue diretamente do nosso trabalho anterior com o NIP e será muito útil posteriormente. Basicamente diz que uma sequência de intervalos fechados aninhados ainda terá uma intersecção não vazia mesmo que seus comprimentos não converjam para zero como no NIP.

Teorema 12.11 *Seja $([a_n, b_n])_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de intervalos aninhados tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n - a_n| > 0$. Então existe pelo menos um $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \in [a_n, b_n]$ para todos $n \in \mathbb{N}$.*

Proof. Por [Corollary 10.27](#) de [Chapter ??](#), sabemos que uma sequência crescente limitada como (a_n) converge, digamos para c . Como $a_n \leq a_m \leq b_n$ para $m > n$ e $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = c$, então para qualquer n fixo, $a_n \leq c \leq b_n$. Isto diz $c \in [a_n, b_n]$ para todos $n \in \mathbb{N}$. ■

Problema 12.12 Suponha $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n - a_n| > 0$. Mostre que existem pelo menos dois pontos, c e d , tais que $c \in [a_n, b_n]$ e $d \in [a_n, b_n]$ para todos $n \in \mathbb{N}$. □

Nosso próximo teorema diz que, em um certo sentido muito técnico, existem mais números reais do que números contáveis [\[3\]](#). Isto provavelmente não parece muito significativo. Afinal, existem números reais que não são números de contagem. O que torna isto tão surpreendente é que o mesmo não pode ser

dito de todos os conjuntos que contêm estritamente os números de contagem. Entraremos em detalhes depois que o teorema for provado.

Teorema 12.13 Cantor, (1874)

Seja $S = (s_n)_{n=1}^{\infty}$ seja uma sequência de números reais. Existe um número real c , que não está em S .

Para simplificar as coisas, estamos abusando da notação aqui, pois deixamos S denotar tanto a sequência (que é ordenada) quanto o conjunto subjacente (não ordenado) de entradas na sequência.

Proof. Para obter uma contradição, suponha que a sequência S contém todos os números reais; isto é, $S = \mathbb{R}$. Como de costume, construiremos uma sequência de intervalos aninhados $([x_i, y_i])_{i=1}^{\infty}$.

Seja x_1 o menor dos dois primeiros elementos distintos de S , seja y_1 o maior e considere $[x_1, y_1]$ o primeiro intervalo.

Em seguida, assumimos que $[x_{n-1}, y_{n-1}]$ foi construído e construímos $[x_n, y_n]$ como segue. Observe que existem infinitos elementos de S em (x_{n-1}, y_{n-1}) desde $S = \mathbb{R}$. Sejam s_m e s_k os primeiros dois elementos distintos de S tais que

$$s_m, s_k \in (x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Considere x_n o menor e y_n o maior de s_m e s_k . Então $[x_n, y_n]$ é o n -ésimo intervalo.

Pela maneira como os construímos, fica claro que

$$[x_1, y_1] \supseteq [x_2, y_2] \supseteq [x_3, y_3] \supseteq \dots$$

Portanto por Teorema 12.11 existe um número real, digamos c , tal que

$$c \in [x_n, y_n] \text{ for all } n \in \mathbb{N}.$$

Na verdade, como $x_1 < x_2 < x_3 \dots < y_3 < y_2 < y_1$ fica claro que

$$x_n < c < y_n, \forall n. \quad (\text{III.1})$$

Mostraremos que c é o número que procuramos. O fato de as desigualdades em formula (III.1) serem estritas desempenhará um papel crucial.

Para ver que $c \notin S$ supomos que $c \in S$ e derivamos uma contradição.

Então, suponha que $c = s_p$ para algum $p \in \mathbb{N}$. Então apenas $\{s_1, s_2, \dots, s_{p-1}\}$ aparecem antes de s_p na sequência S . Como cada x_n é retirado de S , segue-se que apenas um número finito de elementos da sequência (x_n) aparece antes de $s_p = c$ na sequência também.

Seja x_l o último elemento de (x_n) que aparece antes de $c = s_p$ na sequência e considere x_{l+1} . Da forma como foi construído, x_{l+1} foi um dos dois primeiros termos distintos na sequência S estritamente entre x_l e y_l , sendo o outro y_{l+1} . Como x_{l+1} não aparece antes de $c = s_p$ na sequência e $x_l < c < y_l$, segue-se que $c = x_{l+1}$ ou $c = y_{l+1}$. No entanto, isso nos dá uma contradição, como sabemos por formula (III.1) que $x_{l+1} < c < y_{l+1}$.

Assim c não é um elemento de S . ■

Então, como é que este teorema mostra que existem “mais” números reais do que números contáveis? Antes de abordarmos essa questão, precisamos ter muito cuidado com o significado da palavra “mais” quando falamos de conjuntos infinitos.

Primeiro vamos considerar dois conjuntos finitos, digamos $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ e $B = \{a, b, c, d, e\}$. Como sabemos que B é o conjunto maior? (Obviamente é.) É claro que podemos apenas contar o número de elementos em A e B . Como

$|A| = 4$ e $|B| = 5$ e $4 < 5$ B é claramente maior. Mas estamos à procura de uma forma de determinar o tamanho relativo de dois conjuntos sem contá-los, porque não temos forma de contar o número de elementos de um conjunto infinito. Na verdade, nem sequer está claro o que a frase “o número de elementos” pode significar quando aplicada aos elementos de um conjunto infinito.

Quando contamos o número de elementos em um conjunto finito, o que realmente estamos fazendo é combinar os elementos do conjunto com um conjunto de inteiros positivos consecutivos, começando em 1. Assim desde

$$\begin{aligned} 1 &\leftrightarrow \alpha \\ 2 &\leftrightarrow \beta \\ 3 &\leftrightarrow \gamma \\ 4 &\leftrightarrow \delta \end{aligned}$$

vemos que $|A| = 4$. Além disso, a ordem do confronto não é importante. Assim desde

$$\begin{aligned} 2 &\leftrightarrow e \\ 3 &\leftrightarrow a \\ 5 &\leftrightarrow b \\ 4 &\leftrightarrow d \\ 1 &\leftrightarrow c \end{aligned}$$

é claro que os elementos de B e o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ também podem ser combinados. E não importa a ordem em que um dos conjuntos está. Ambos têm 5 elementos.

Essa correspondência é chamada de correspondência um-para-um. Em geral, se dois conjuntos podem ser colocados em correspondência biunívoca, então eles têm o mesmo “tamanho”. É claro que a palavra “tamanho” tem muitas conotações que começarão a atrapalhar quando falaremos sobre conjuntos infinitos, então, em vez disso, diremos que os dois conjuntos têm a mesma *cardinalidade*. Falando livremente, isso significa apenas que eles são do mesmo tamanho.

Mais precisamente, se um determinado conjunto S puder ser colocado em correspondência biunívoca com um conjunto finito de inteiros consecutivos, digamos $\{1, 2, 3, \dots, N\}$, então dizemos que a cardinalidade do conjunto é N . Mas isto significa apenas que ambos os conjuntos têm a mesma cardinalidade. É esta noção de correspondência biunívoca, juntamente com as próximas duas definições, que nos permitirá comparar os tamanhos (cardinalidades) de conjuntos infinitos.

Definição 12.14 Qualquer conjunto que possa ser colocado em correspondência um-para-um com $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ é chamado de conjunto **contávelmente infinito**. Qualquer conjunto que seja finito ou infinito contável é dito **contável**. $\diamond$

Como $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito, não temos nenhum símbolo para designar sua cardinalidade, então temos que inventar um. O símbolo usado por Cantor e adotado pelos matemáticos desde então é $\aleph_0$. Assim, a cardinalidade de qualquer conjunto infinito contável é $\aleph_0$.

$\aleph$ é a primeira letra do alfabeto hebraico e é pronunciada “aleph”. $\aleph_0$ é pronunciado “aleph nulo.”

Já demos a seguinte definição informalmente. Nós o incluímos formalmente aqui para referência posterior.

Definição 12.15 Se dois conjuntos podem ser colocados em correspondência biunívoca então dizemos que eles têm a *mesma cardinalidade*. $\diamond$

Com essas duas definições em vigor, podemos ver que Teorema 12.13 é nada menos que a afirmação de que os números reais não são contáveis infinitos. Como certamente não é finito, então dizemos que o conjunto dos números reais é incontável e, portanto, “maior” que os números naturais!

Para ver isso, vamos supor primeiro que cada número real aparece na sequência $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ exatamente uma vez. Nesse caso, a indexação da nossa sequência é na verdade apenas uma correspondência um-para-um entre os elementos da sequência e $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 1 &\leftrightarrow s_1 \\ 2 &\leftrightarrow s_2 \\ 3 &\leftrightarrow s_3 \\ 4 &\leftrightarrow s_4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Se alguns números reais são repetidos em nossa sequência, então todos os números reais são um subconjunto de nossa sequência e, portanto, também serão contáveis (veja Problem ??, parte a).

Em ambos os casos, cada sequência é contável. Mas nosso teorema diz que *nenhuma* sequência em $\mathbb{R}$ inclui toda a $\mathbb{R}$. Portanto $\mathbb{R}$ é incontável.

A maioria dos conjuntos que você encontrou até agora em sua vida são contáveis.

Problema 12.16 Mostre que cada um dos seguintes conjuntos é contável.

- (a) $\{2, 3, 4, 5, \dots\} = \{n\}_{n=2}^{\infty}$
- (b) $\{0, 1, 2, 3, \dots\} = \{n\}_{n=0}^{\infty}$
- (c) $\{1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots\} = \{n^2\}_{n=1}^{\infty}$
- (d) O conjunto dos números primos
- (e) $\mathbb{Z}$

□

Na verdade, se começarmos com um conjunto contável, será bastante difícil usá-lo para construir qualquer coisa que não seja outro conjunto contável.

Problema 12.17 Seja $\{A_i\}$ uma coleção de conjuntos contáveis. Mostre que cada um dos seguintes conjuntos também é contável:

- (a) Qualquer subconjunto de A_1 .
- (b) $A_1 \cup A_2$
- (c) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$
- (d) $\bigcup_{i=1}^n A_i$
- (e) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

□

Parece que não importa o que façamos, o único exemplo de um conjunto incontavelmente infinito é $\mathbb{R}$. Mas espere! Lembra dos números racionais? Eles eram semelhantes aos números reais em muitos aspectos. Talvez eles também sejam incontáveis e infinitos?

Infelizmente, não. Os números racionais também são contáveis.

Teorema 12.18 *Mostre que $\mathbb{Q}$ é contável.*

Esboço da prova. Primeiro explique como você sabe que todos os números racionais não negativos estão nesta lista:

$$\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{1}{1}, \frac{0}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{0}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \dots$$

No entanto, há claramente alguma duplicação. Para lidar com isso, aplique a parte (a) do [Problem 12.17](#). Isso completa a prova ou há mais a fazer? ■

Problema 12.19 Prove Teorema ??.

O seguinte corolário diz que a cardinalidade dos números reais é *muito* maior que a cardinalidade dos números racionais, apesar de ambos serem infinitos.

Isto é, como um subconjunto dos reais, os racionais podem estar contidos numa sequência de intervalos, cuja soma dos comprimentos pode ser arbitrariamente pequena. De certa forma, isso diz que um conjunto infinito contável é tão pequeno (na escala transfinita) que é “quase” finito.

Normalmente expressamos esta ideia com a afirmação, “ $\mathbb{Q}$ é um conjunto de *medida zero* em $\mathbb{R}$ ”. O termo “medida” tem um significado preciso que não iremos prosseguir. O seguinte corolário contém a essência da ideia.

Corolário 12.20 *Seja $\varepsilon > 0$ dado. Existe uma coleção de intervalos em $\mathbb{R}$, $I_n = [a_n, b_n]$ tal que*

$$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon.$$

Problema 12.21 Prove [Corollary 12.20](#).

Dica. Se tivéssemos apenas um número finito de racionais para lidar com isso seria fácil. Deixar $\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ sejam esses números racionais e tome $a_n = r_n - \frac{\varepsilon}{2(k+1)}$ e $b_n = r_n + \frac{\varepsilon}{2(k+1)}$. Então para todos $n = 1, \dots, k$ $r_n \in [a_n, b_n]$ e

$$\sum_{n=1}^k b_n - a_n = \sum_{n=1}^k \frac{\varepsilon}{k+1} = \frac{k\varepsilon}{k+1} < \varepsilon.$$

A dificuldade é: como passamos do caso finito para o caso infinito? □

Observe como essa ideia remonta à discussão da abordagem de Leibniz para a Regra do Produto ([equation \(I.1\)](#)). Ele simplesmente deixou de lado a expressão $dx dy$ porque ela era *infinitamente pequena* comparada com $x dy$ ou $y dx$. Embora não seja exatamente a mesma coisa que estamos discutindo aqui, é semelhante e está claro que o insight e a intuição de Leibniz eram extremamente aguçados. Eles o estavam levando na direção certa, pelo menos.

Todos os nossos esforços para construir um conjunto incontável a partir de um conjunto contável deram em nada. Na verdade, muitos conjuntos que a princípio “parecem” que deveriam ser incontáveis são na verdade contáveis. Isso torna a incontável de $\mathbb{R}$ ainda mais notável.

A falha está nos métodos que usamos até agora. É possível construir um conjunto incontável usando apenas dois símbolos se formos espertos o suficiente, mas isso nos afastaria muito do nosso tópico principal.

Contudo se *começamos* com um conjunto incontável é relativamente fácil construir outros a partir dele.

Problema 12.22

- (a) Sejam (a, b) e (c, d) dois intervalos abertos de números reais. Mostre que esses dois conjuntos têm a mesma cardinalidade construindo uma função bijetiva entre eles.

Dica. Uma função linear deve resolver o problema.

- (b) Mostre que qualquer intervalo aberto de números reais tem a mesma cardinalidade que $\mathbb{R}$.

Dica. Considere o intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

- (c) Mostre que $(0, 1]$ e $(0, 1)$ têm a mesma cardinalidade.

Hint. Observe que $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ e $\{1/2, 1/3, \dots\}$ têm a mesma cardinalidade.

- (d) Mostre que $[0, 1]$ e $(0, 1)$ têm a mesma cardinalidade.

□

12.2 Teorema de Cantor e suas consequências



Figure 12.23 Richard Dedekind¹⁷

Uma vez que Cantor mostrou que havia dois tipos de infinito (contável e incontável), a seguinte pergunta era natural: “Todos os conjuntos incontáveis têm a mesma cardinalidade?”

Assim como nem todos os “não-cães” são gatos, não há, de imediato, nenhuma razão para acreditar que todos os conjuntos incontáveis devam ser do mesmo tamanho. No entanto, construir incontáveis conjuntos de tamanhos diferentes não é tão fácil quanto parece.

Por exemplo, o que acontece com o segmento de linha representado pelo intervalo $[0, 1]$ e o quadrado representado pelo definir $[0, 1] \leq [0, 1] = \{(x, y) | 0 \leq x, y \leq 1\}$. Certamente o quadrado bidimensional deve ser um conjunto infinito maior que o segmento de reta unidimensional. Notavelmente, Cantor mostrou que esses

¹⁹mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dedekind/

dois conjuntos tinham a mesma cardinalidade. Em sua correspondência de 1877 sobre esse resultado para seu amigo e colega matemático, Richard Dedekind, até mesmo Cantor observou: “Eu vejo, mas não acredito!”

O que se segue dá a ideia original da prova de Cantor. Cantor desenvolveu a seguinte função $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Primeiro, representamos as coordenadas de qualquer ponto $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ por suas representações decimais $x = 0.a_1a_2a_3\dots$ e $y = 0.b_1b_2b_3\dots$. Mesmo os decimais terminais podem ser escritos desta forma, como poderíamos escrever $0,5 = 0,5000\dots$. Podemos então definir $f(x, y)$ por

$$f((0.a_1a_2a_3\dots, 0.b_1b_2b_3\dots)) = 0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\dots$$

Esta ideia relativamente simples apresenta algumas dificuldades técnicas relacionadas ao seguinte resultado.

Problema 12.24 Considere a sequência $(0.9, 0.99, 0.999, \dots)$. Determine que esta sequência converge e, de fato, converge para 1. Isso sugere que $0,999\dots = 1$. $\square$

Da mesma forma, temos $0,04999\dots = 0,05000\dots$, etc. Para tornar única a representação decimal de um número real em $[0, 1]$, devemos fazer uma escolha consistente de escrever um decimal final como aquele que termina em uma sequência infinita de zeros ou uma sequência infinita de noves [com a única exceção $0 = 0.000\dots$]. Não importa qual escolha façamos, nunca poderíamos realizar essa função. Por exemplo, $109/1100 = 0.09909090\dots$ teria como pré-imagem $(0.0999\dots, 0.9000\dots)$ que seria uma mistura das duas convenções.

Cantor foi capaz de superar esse detalhe técnico para demonstrar uma correspondência um para um, mas em vez disso notaremos que em qualquer uma das convenções, a função é um para um, então isso diz que o conjunto $[0, 1] \times [0, 1]$ é a mesma cardinalidade de algum subconjunto (incontável) de $\mathbb{R}$. O fato de ter a mesma cardinalidade que $\mathbb{R}$ é algo ao qual voltaremos. Mas primeiro tentaremos construir um conjunto incontável que não tenha a mesma cardinalidade que $\mathbb{R}$. Para resolver esta questão, Cantor provou o seguinte em 1891.

Teorema 12.25 Teorema de Cantor

Seja S qualquer conjunto. Então não há correspondência biunívoca entre S e $P(S)$, o conjunto de todos os subconjuntos de S .

Como S pode ser colocado em correspondência biunívoca com um subconjunto de $P(S)$ ($a \rightarrow \{a\}$), então isso diz que $P(S)$ é pelo menos tão grande quanto S . No caso finito $|P(S)|$ é estritamente maior que $|S|$ como o seguinte problema mostra. Também demonstra por que $P(S)$ é chamado de conjunto de potências de S .

Problema 12.26 Prove: Se $|S| = n$, então $|P(S)| = 2^n$.

Hint. Deixe $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Considere a seguinte correspondência entre os elementos de $P(S)$ e o conjunto T de todas as n -tuplas de sim (Y) ou não (N):

$$\begin{aligned} \{\} &\leftrightarrow \{N, N, N, \dots, N\} \\ \{a_1\} &\leftrightarrow \{Y, N, N, \dots, N\} \\ \{a_2\} &\leftrightarrow \{N, Y, N, \dots, N\} \\ &\vdots \\ S &\leftrightarrow \{Y, Y, Y, \dots, Y\} \end{aligned}$$

Quantos elementos existem T ?

$\square$

Problema 12.27 Prove Teorema de Cantor 12.25.

Hint. Suponha, por contradição, que existe uma correspondência biunívoca $f : S \rightarrow P(S)$. Considerar $A = \{x \in S | x \notin f(x)\}$. Como f é sobre, então existe $a \in A$ tal que $A = f(a)$. É $a \in A$ ou $a \notin A$? $\square$

Na verdade, $\mathbb{R}$ e $P(\mathbb{N})$ têm a mesma cardinalidade. Isso pode ser visto de forma indireta usando algumas das ideias acima de Problem 12.26. Especificamente, seja T o conjunto de todas as sequências de zeros ou uns (você pode usar Y s ou N s, se preferir). Então é fácil ver que T e $P(\mathbb{N})$ têm a mesma cardinalidade.

Se considerarmos $(0, 1]$, que tem a mesma cardinalidade que $\mathbb{R}$, então podemos ver que ele também tem a mesma cardinalidade que T . Especificamente, se pensarmos dos números em binário, então todo número real em $[0, 1]$ pode ser escrito como $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j} = 0.a_1a_2a_3\dots$ onde $a_j \in \{0, 1\}$. Temos que levar em conta o fato de que representações binárias como $0.0111\dots$ e $.0,1000\dots$ representam o mesmo número real (digamos que nenhuma representação terminará em uma sequência infinita de zeros), então podemos ver que $[0, 1]$ tem a mesma cardinalidade de $T - U$, onde U é o conjunto de todas as sequências que terminam em uma sequência infinita de zeros. Acontece que o próprio U é um conjunto contável.

Problema 12.28 Seja $U_n = \{(a_1, a_2, a_3, \dots) \mid a_j \in \{0, 1\} \text{ e } a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = 0\}$. Mostre que para cada n , U_n é finito e use isso para concluir que U é contabilmente infinito. $\square$

Os dois problemas a seguir mostram que a exclusão de um conjunto contável de um conjunto incontável não altera sua cardinalidade.

Problema 12.29 Seja S um conjunto infinito. Prove que S contém um subconjunto infinito contável. $\square$

Problema 12.30 Suponha que X seja um conjunto incontável e $Y \subset X$ seja contavelmente infinito. Prove que X e $X - Y$ têm a mesma cardinalidade.

Dica. Seja $Y = Y_0$. Se $X - Y_0$ é um conjunto infinito, então pelo problema anterior ele contém um conjunto infinito contável Y_1 . Da mesma forma, se $X - (Y_0 \cup Y_1)$ for infinito, ele também contém um conjunto infinito Y_2 . Novamente, se $X - (Y_0 \cup Y_1 \cup Y_2)$ é um conjunto infinito então ele contém um conjunto infinito Y_3 , etc. Para $n = 1, 2, 3, \dots$, seja $f_n : Y_{n-1} \rightarrow Y_n$ uma correspondência um-para-um e defina $f : X \rightarrow X - Y$ por

$$\begin{cases} f(x) = f_n(x), & \text{if } x \in Y_n, n = 0, 1, 2, \dots \\ f(x) = x, & \text{if } x \in X - (\cup_{n=0}^{\infty} Y_n) \end{cases}.$$

Mostre que f é injetora e sobre. $\square$

Os problemas acima dizem que R , $T - U$, T e $P(\mathbb{N})$ todos têm a mesma cardinalidade.

Como foi indicado anteriormente, o trabalho de Cantor sobre conjuntos infinitos teve um impacto profundo na matemática no início do século XX. Por exemplo, ao examinar a prova do Teorema de Cantor, o eminente lógico Bertrand Russell concebeu o seu famoso paradoxo em 1901. Antes desta altura, um conjunto era ingenuamente pensado apenas como uma colecção de objectos. Através do trabalho de Cantor e outros, os conjuntos estavam se tornando um objeto central de estudo em matemática, à medida que muitos conceitos matemáticos eram reformulados em termos de conjuntos. A ideia era que a teoria dos conjuntos seria um tema unificador da matemática. Este paradoxo colocou o mundo matemático em alerta.

{Paradoxo de Russell} Considere o conjunto de todos os conjuntos que não

são elementos de si mesmos. Chamamos esse conjunto de D e perguntamos: “É $D \in D$?” Simbolicamente, esse conjunto é

$$D = \{S \mid S \notin S\}.$$

Se $D \in D$, então por definição, $D \notin D$. Se $D \notin D$, então por definição, $D \in D$.

Se você olhar novamente para a prova do Teorema de Cantor, verá que essa foi basicamente a ideia que nos deu a contradição. Ter tal contradição ocorrendo no nível mais básico da matemática era escandaloso. Forçou vários matemáticos e lógicos a elaborar cuidadosamente os axiomas pelos quais os conjuntos poderiam ser construídos. Para ser honesto, a maioria dos matemáticos ainda aborda a teoria dos conjuntos de um ponto de vista ingênuo, já que os conjuntos com os quais normalmente lidamos se enquadram na categoria do que chamaríamos de “conjuntos normais”. Na verdade, tal abordagem é oficialmente chamada de Conjunto Naive. Teoria (em oposição à Teoria Axiomática dos Conjuntos). No entanto, as tentativas de colocar a teoria dos conjuntos e a lógica em bases sólidas levaram ao estudo moderno da lógica simbólica e, em última análise, ao design da lógica do computador (máquina).

Outro lugar onde o trabalho de Cantor teve uma influência profunda na lógica moderna vem de algo a que aludimos anteriormente. Mostramos antes que o quadrado unitário $[0, 1] \times [0, 1]$ tinha a mesma cardinalidade que um subconjunto incontável de $\mathbb{R}$. Na verdade, Cantor mostrou que o quadrado unitário tinha a mesma cardinalidade que o próprio $\mathbb{R}$ e foi movido para avançar o seguinte em 1878.

Conjectura 12.31 A hipótese do contínuo. *Todo subconjunto incontável de $\mathbb{R}$ tem a mesma cardinalidade que $\mathbb{R}$.*

Cantor foi incapaz de provar ou refutar esta conjectura (juntamente com todos os outros matemáticos). Na verdade, provar ou refutar esta conjectura, que foi apelidada de Hipótese do Continuum, foi um dos famosos 23 problemas de Hilbert apresentados como um desafio aos matemáticos no Congresso Internacional de Matemáticos em 1900.

Como $\mathbb{R}$ tem a mesma cardinalidade que $P(\mathbb{N})$, então a Hipótese do Continuum foi generalizada para o:

Conjectura 12.32 A hipótese do contínuo generalizado. *Dado um conjunto infinito S , não existe nenhum conjunto infinito que tenha uma cardinalidade estritamente entre aquela de S e seu conjunto de potências $P(S)$.*

Os Axiomas de Zermelo-Fraenkel. Uma das abordagens axiomáticas formais da teoria dos conjuntos estabelecida por Ernst Zermelo em 1908 e revisada por Abraham Fraenkel em 1921.

Os esforços para provar ou refutar isto foram em vão e com boas razões. Em 1940, o lógico Kurt Gödel mostrou que a Hipótese do Continuum não poderia ser refutada a partir dos Axiomas de Zermelo-Fraenkel da teoria dos conjuntos. Em 1963, Paul Cohen mostrou que a Hipótese do Continuum não poderia ser provada usando os Axiomas de Zermelo-Fraenkel. Em outras palavras, os Axiomas de Zermelo-Fraenkel não contêm informações suficientes para decidir a veracidade da hipótese.

Estamos dispostos a apostar que neste momento sua cabeça pode estar nadando um pouco com a incerteza. Se sim, então saiba que estes são os mesmos sentimentos que a comunidade matemática experimentou em meados do século XX. No passado, a matemática era vista como um modelo de certeza lógica. É desconcertante descobrir que existem afirmações que são “indecidíveis”. Na verdade, Gödel provou em 1931 que um sistema de axiomas finitos consistente

que contivesse os axiomas da aritmética sempre conteria afirmações indecidíveis que não poderiam ser provadas verdadeiras nem falsas com esses axiomas. O conhecimento matemático seria sempre incompleto.



Figure 12.33 Kurt Gödel¹⁸

Assim, ao tentarmos assentar os fundamentos do cálculo em terreno sólido, chegámos a um ponto em que nunca poderemos obter certeza matemática. Significa isto que devemos levantar as mãos e admitir a derrota? Deveríamos ficar paralisados de medo de tentar alguma coisa? Certamente não! Como mencionamos antes, a maioria dos matemáticos se sai bem ao adotar uma abordagem pragmática: usar sua matemática para resolver problemas que encontram. Na verdade, normalmente são os problemas que motivam a matemática. É verdade que os matemáticos correm riscos que nem sempre dão certo, mas ainda assim arriscam, muitas vezes com sucesso. Mesmo quando os sucessos levam a mais questões, como normalmente acontece, lidar com essas questões geralmente leva a uma compreensão mais profunda. No mínimo, a nossa compreensão incompleta significa que teremos sempre mais perguntas para responder, mais problemas para resolver.

O que mais um matemático poderia pedir?

²⁰mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Godel/

Capítulo 13

Epílogos

13.1 Sobre a natureza dos números: um diálogo (com desculpas a Galileu)

Interlocutores: *Salviati, Sagredo e Simplicio; Três amigos de Galileu Galilei*

Cenário: Três amigos se encontram em um jardim para almoçar na Itália Renasçença. Antes da refeição, eles discutem o livro *How We Got From There to Here: A Story of Real Analysis*. Não está claro como eles obtiveram uma cópia.

Salviati: Meus bons senhores. Eu li este volume muito estranho, como espero que você tenha lido?

Sagredo: Já e também achei muito estranho.

Simplicio: Muito estranho mesmo; ao mesmo tempo bobo e misterioso.

Salviati: Bobo? Como assim?

Simplicio: Esses autores começam seu livro com a pergunta: “O que é um número?” Esta é uma pergunta incomumente boba, você não acha? Números são números. Todo mundo sabe o que são.

Sagredo: Eu também pensava assim até chegar ao último capítulo. Mas agora não tenho tanta certeza. E essa quantidade $\aleph_0$? Se conta os inteiros positivos, não é um número? Se não, então como pode contar alguma coisa? Se sim, então que número é esse? Essas perguntas me atormentam até quase não acreditar que sei mais alguma coisa.

Simplicio: Claro que $\aleph_0$ não é um número! É simplesmente um novo nome para o infinito, e o infinito não é um número.

Sagredo: Mas $\aleph_0$ não é a cardinalidade do conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$, da mesma forma que a cardinalidade do conjunto $S = \{\text{Salviati}, \text{Sagredo}, \text{Simplicio}\}$ é 3? Se 3 é um número, então por que não é $\aleph_0$?

Simplicio: Ah, meu amigo, assim como nossos autores você está simplesmente brincando com as palavras. Você conta os elementos do conjunto $S = \{\text{Salviati}, \text{Sagredo}, \text{Simplicio}\}$; você vê claramente que o *número de elementos* que ele contém é 3 e então você muda seu idioma. Em vez de dizer que o *número de elementos* em S é 3, você diz que a *cardinalidade* é 3. Mas claramente “cardinalidade” e “número de elementos” significam a mesma coisa.

Da mesma forma, você usa o símbolo $\mathbb{N}$ para denotar o conjunto de inteiros positivos. Com sua nova palavra e símbolo você faz a afirmação “a *cardinalidade* (número de elementos) de $\mathbb{N}$ é $\aleph_0$.” Esta afirmação tem a mesma forma gramatical que a afirmação “o *número de elementos* (cardinalidade) de S é três.” Como três é um número você conclui que $\aleph_0$ também é um número.

Mas isso é simplesmente um absurdo disfarçado para parecer sensato. Se desenrolarmos nossa notação e linguagem, sua afirmação será simplesmente: “O número de inteiros positivos é infinito.” Isto é obviamente um absurdo porque infinito *não* é um número.

Mesmo se tomarmos infinito como um termo indefinido e tentarmos defini-lo pela sua afirmação, isso ainda não faz sentido, já que você está usando a palavra “número” para definir um novo “número” chamado infinito. Esta definição é circular. Portanto, não é nenhuma definição. É um absurdo.

Salviati: Seu raciocínio sobre isso certamente parece correto.

Simplicio: Obrigado.

Salviati: No entanto, há alguns pequenos pontos que gostaria de examinar mais de perto, se você me permitir?

Simplicio: Claro. O que te incomoda?

Salviati: Você disse que não podemos usar a palavra “número” para definir números porque isso seria um raciocínio circular. Concordo inteiramente, mas não tenho certeza se é isso que nossos autores estão fazendo.

Considere o conjunto $\{1, 2, 3\}$. Você concorda que contém três elementos?

Simplicio: Obviamente.

Sagredo: Ah! Eu entendo o seu ponto! O fato de existirem três elementos *não* depende de quais são esses elementos. Qualquer conjunto com três elementos possui três elementos, independentemente da natureza dos elementos. Dizendo assim que o conjunto $\{1, 2, 3\}$ contém três elementos não define a palavra “número” de maneira circular porque é irrelevante que o *número* 3 seja um dos elementos do conjunto. Assim, dizer que três é a cardinalidade do conjunto $\{1, 2, 3\}$ tem o mesmo significado que dizer que existem três elementos no conjunto $\{\text{Salviati}, \text{Sagredo}, \text{Simplicio}\}$. Em ambos os casos o número “3” é o nome que damos à totalidade dos elementos de cada conjunto.

Salviati: Precisamente. Exatamente da mesma maneira $\aleph_0$ é o símbolo que usamos para denotar a totalidade do conjunto de inteiros positivos.

Assim $\aleph_0$ é um número no mesmo sentido que ‘3’ é um número, não é?

Simplicio: Vejo que podemos dizer de uma forma significativa que três é a cardinalidade de qualquer conjunto com . . . bem, . . . com três elementos (torna-se muito difícil falar sobre estas coisas), mas isso é simplesmente uma tautologia! É uma forma de dizer que um conjunto que possui três elementos possui três elementos!

Isto significa apenas que os contamos e tivemos que parar no três. Para fazer isso, devemos primeiro ter números. O que, claro, nós fazemos. Como eu disse, todo mundo sabe o que são números.

Sagredo: Devo confessar, meu amigo, que fico mais confuso à medida que conversamos. Não tenho mais certeza se realmente sei o que é um número. Já que você parece ter mantido sua certeza, pode esclarecer isso para mim? Você pode me dizer o que é um número?

Simplicio: Certamente. Um número é o que acabamos de discutir. É o que você tem quando para de contar. Por exemplo, três é a totalidade (para usar sua frase) dos elementos dos conjuntos $\{\text{Salviati}, \text{Sagredo}, \text{Simplicio}\}$ ou $\{1, 2, 3\}$ porque quando conto os elementos de qualquer conjunto tenho que parar no três. Nada menos, nada mais. Portanto, três é um número.

Salviati: Mas esta definição só me confunde! Certamente você admitirá que frações são números? O que é contado quando terminamos com, digamos, $4/5$ ou $1/5$?

Simplicio: Isso é a própria simplicidade. $4/5$ é o número que obtemos quando dividimos algo em 5 partes iguais e contamos quatro desses quintos. Isto é quatro quintos. Você vê? Até a linguagem que usamos se adapta naturalmente ao nosso propósito.

Salviati: Mas e um quinto? Para contar um quinto, devemos primeiro dividir algo em quintos. Para fazer isso, precisamos saber quanto é um quinto, não é? Parece que estamos usando a palavra “número” para se definir novamente. Não fechamos o círculo e não chegamos a lugar nenhum?

Simplicio: Confesso que isso nunca tinha me ocorrido antes. Mas sua objeção é facilmente respondida. Para contar um quinto simplesmente dividimos nosso “algo” em décimos. Então contamos dois deles. Como dois décimos equivalem a um quinto, o problema está resolvido. Você vê?

Sagredo: Entendo o que você quer dizer, mas não será suficiente! Simplesmente substitui a pergunta “O que é um quinto?” por “O que é um décimo?” Nem adianta dizer que um décimo é apenas dois vigésimos. Isso simplesmente desloca a questão para outro nível.

Arquimedes disse: “Dê-me um ponto de apoio e uma alavanca suficientemente longa e moverei a terra”. Mas é claro que ele nunca moveu a terra porque não tinha onde ficar de pé. Parece que nos encontramos na situação de Arquimedes: não temos onde ficar.

Simplicio: Confesso que não vejo como responder isso agora. No entanto, tenho certeza de que uma resposta pode ser encontrada se pensarmos bastante. Enquanto isso, não posso aceitar que $\aleph_0$ seja um número. É, como eu disse antes, infinito e infinito não é um número! Podemos também acreditar em fadas e duendes se chamarmos o infinito de número.

Sagredo: Mas novamente fechamos o círculo. Não podemos dizer definitivamente que $\aleph_0$ é ou não um número até que possamos afirmar com confiança o que é um número. E mesmo se pudéssemos encontrar uma base sólida para resolver o problema das frações, o que dizer de $\sqrt{2}$? Ou π ? Certamente estes são números, mas não vejo como contar para nenhum deles deles.

Simplicio: Infelizmente! Estou cercado por demônios! Estou enfeitado! Não acredito mais no que *sei* ser verdade!

Salviati: Talvez as coisas não sejam tão ruins assim. Vamos considerar mais detalhadamente. Você disse anteriormente que todos nós sabemos o que são números e eu concordo. Mas talvez a sua afirmação precise ser formulada com mais precisão. Suponha que digamos, em vez disso, que todos nós sabemos quais números *precisam* ser? Ou que sabemos o que *queremos* que os números sejam?

Mesmo que não possamos dizer com certeza quais são os números, certamente podemos dizer o que queremos e precisamos que eles sejam. Você concorda?

Sagredo: Sim.

Simplicio: E eu também.

Salviati: Então vamos inventar os números de novo, como se nunca os tivéssemos visto antes, tendo sempre em mente as propriedades que precisamos para que os números tenham. Se tomarmos isso como ponto de partida, então a questão que precisamos abordar é: “O que precisamos que os números sejam?”

Sagredo: Isso é óbvio! Precisamos ser capazes de adicioná-los e multiplicá-los, e o resultado também deve ser um número.

Simplicio: E subtrair e dividir também, claro.

Sagredo: Não tenho certeza se realmente precisamos disso. Não poderíamos definir “subtrair dois de três” como “adicionar menos dois a três” e assim dispensar a subtração e a divisão?

Simplicio: Suponho que podemos, mas não vejo vantagem em fazê-lo. Por que não simplesmente fazer subtração e divisão como sempre as conhecemos?

Sagredo: A vantagem é a parcimônia. Duas operações aritméticas são mais fáceis de controlar do que quatro. Sugiro que prossigamos apenas com adição e multiplicação por enquanto. Se descobrirmos que precisamos de subtração ou divisão, podemos considerá-las mais tarde.

Simplicio: Concordo. E agora vejo outra vantagem. Obviamente, adição e multiplicação não devem depender de ordem. Ou seja, se x e y são números então $x + y$ deve ser igual a $y + x$ e xy deve ser igual a yx . Isso não é verdade para subtração, pois $3 - 2$ *não* é igual a $2 - 3$. Mas se definirmos a subtração como você sugere, essa simetria será preservada:

$$x + (-y) = (-y) + x.$$

Sagredo: Excelente! Outra propriedade que exigiremos dos números me ocorre agora. Ao adicionar ou multiplicar mais de dois números, não importa onde começamos. Ou seja, se x , y e z são números deveria ser verdade que

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

e

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

Simplicio: Sim! Nós temos isso! Quaisquer objetos que se combinem dessas maneiras precisas podem ser chamados de números.

Salviati: Certamente estas propriedades são necessárias, mas não creio que ainda sejam suficientes para o nosso propósito. Por exemplo, o número 1 é único porque é o único número que, ao multiplicar outro número, o deixa inalterado.

Por exemplo: $1 \cdot 3 = 3$. Ou, em geral, se x é um número então $1 \cdot x = x$.

Sagredo: Sim. De fato. Ocorre-me que o número zero desempenha um papel semelhante para adição: $0 + x = x$.

Salviati: Não me parece que adição e multiplicação, como as definimos, forcem 1 ou 0 a existir, então acredito que teremos que postular sua existência independentemente.

Sagredo: Isso é tudo então? Isso é tudo que exigimos dos números?

Simplicio: Acho que ainda não terminamos. Como obteremos a divisão?

Sagredo: Da mesma forma que definimos a subtração como a adição de um número negativo, não podemos definir a divisão como a multiplicação por um inverso? Por exemplo, 3 dividido por 2 pode ser considerado 3 *multiplicado* por $1/2$, não pode?

Salviati: Acho que pode. Mas observe que *todo* número precisará ter um negativo correspondente para que possamos subtrair qualquer valor. E, novamente, nada do que discutimos até agora força a existência desses números negativos, então teremos que postular sua existência separadamente.

Simplicio: E da mesma forma todo número precisará de um recíproco para que possamos dividir por qualquer valor.

Sagredo: Todo número que for, exceto zero.

Simplicio: Sim, isso é verdade. Estranho, não é que, de todos eles, apenas este número não precise de recíproco? Devemos também postular que zero não tem recíproco?

Salviati: Não vejo por que deveríamos. Possivelmente $\aleph_0$ é o inverso de zero. Ou possivelmente não. Mas não vejo necessidade de nos preocuparmos com coisas que não precisamos.

Simplicio: Isso é tudo então? Descobrimos tudo o que precisamos para que os números existam?

Salviati: Acredito que só falta uma propriedade. Postulamos a adição e a multiplicação e descrevemos os números zero e um que desempenham papéis semelhantes para adição e multiplicação, respectivamente. Mas não descrevemos como a adição e a multiplicação funcionam juntas.

Ou seja, precisamos de uma regra de distribuição: se x , y e z são todos números, então

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Com isso implementado, acredito que temos tudo o que precisamos.

Simplicio: De fato. Também podemos ver com isso que $\aleph_0$ não pode ser um número, pois, em primeiro lugar, não pode ser adicionado a outro número e, em segundo lugar, mesmo que pudesse ser adicionado a um número, o resultado certamente não é também um número.

Salviati: Meu caro Símplicio, temo que você não tenha entendido completamente! Nossos axiomas não declaram o que é um número, apenas como ele se comporta em relação à adição e multiplicação com outros números. Portanto, é um erro presumir que os “números” são apenas aqueles objetos que sempre acreditamos que fossem. Na verdade, agora me ocorre que “adição” e “multiplicação” também não precisam ser vistas como as operações que sempre acreditamos que fossem.

Por exemplo, suponha que temos três objetos, $\{a, b, c\}$ e suponha que definimos “adição” e “multiplicação” pelas seguintes tabelas:

$+$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$\cdot$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

Afirmo que nosso conjunto junto com essas definições satisfazem todos os nossos axiomas e, portanto, a , b e c se qualificam para serem chamados de “números”

Simplicio: Isso não pode ser! Não existe zero, ninguém!

Sagredo: Mas existe. Você não vê que a desempenha o papel de zero — se você adicioná-lo a qualquer número, você obterá esse número de volta. Da mesma forma b desempenha o papel de um.

Simplicio: Isso é surpreendente! Se a , b e c podem ser números, então tenho menos certeza do que nunca de saber o que são números! Ora, se substituirmos a , b , e c por *Simplicio Sagredo*, e *Salviati* então *nós mesmos* nos tornaremos números!

Salviati: Talvez tenhamos que nos contentar em saber como os números se comportam, em vez de saber o que eles são.

Contudo confesso que tenho um certo carinho pelos números com os quais cresci. Vamos chamá-los de números “reais”. Qualquer outro conjunto de números, como o nosso $\{a, b, c\}$ acima, chamaremos de campo de números, pois eles parecem nos fornecer um novo terreno para explorar. Ou talvez apenas um *campo numérico*?

Enquanto discutimos isso, escrevi nossos axiomas. Eles são estes. Números são quaisquer objetos que satisfaçam todas as seguintes propriedades:

AXIOMAS DE NÚMEROS

Axioma I:	Eles podem ser combinados por duas operações, denotadas
Definição de Operações	“ $\cdot$ ” e “ $+$ ”.
Axioma II:	Se x , y e z são números, então $x + y$ também é um número.
Fechamento	$x \cdot y$ também é um número.
Axioma II: Co-	$x + y = y + x$ $x \cdot y = y \cdot x$
mutatividade	
Axioma III: As-	$(x + y) + z = x + (y + z)$ $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
sociatividade	

Axioma IV:	Existe um número, denotado 0, tal que para qualquer
Identidade	número, x ,
Aditiva	$x + 0 = x$.
Axioma V:	Existe um número, denotado 1, tal que para qualquer
Identidade	número, x ,
Multiplicativa	$1 \cdot x = x$.
Axioma VI:	Dado qualquer número, x , existe um número, denotado
Inversos	$-x$, com a propriedade que
Aditivos	$x + (-x) = 0$.
Axioma VII:	Dado qualquer número, $x \neq 0$, existe um número, deno-
Inverso	tado x^{-1} , com a propriedade que
Multiplicativo	$x \cdot x^{-1} = 1$.
Axioma VIII:	Se x , y e z são números então
A Propriedade	
Distributiva	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Sagredo: Meu amigo, isso é de uma beleza incomparável! Tudo parece claro para mim agora. Números são qualquer grupo de objetos que satisfaçam nossos axiomas. Ou seja, um número é qualquer coisa que *age* como um número.

Salviati: Sim, isso parece ser verdade.

Simplicio: Mas espere! Ainda não resolvemos a questão: $\aleph_0$ é um número ou não?

Salviati: Se tudo o que acabamos de fazer é válido então $\aleph_0$ *poderia ser* um número. E assim poderíamos $\aleph_1, \aleph_2 \dots$ *if* podemos encontrar uma maneira de definir adição e multiplicação no conjunto $\{\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2 \dots\}$ de uma maneira que esteja de acordo com nossos axiomas.

Sagredo: Uma aritmética de infinitos! Esta é uma ideia muito estranha. Isso pode ser tornado sensato?

Simplicio: Acho que não antes do almoço. Vamos nos retirar para a nossa refeição?

13.1.1 Problemas Adicionais

Problema 13.1 Mostre que $0 \neq 1$.

Hint. Mostre que se $x \neq 0$, então $0 \cdot x \neq x$. □

Problema 13.2 Considere o conjunto de pares ordenados de inteiros: $\{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}\}$, e defina adição e multiplicação da seguinte forma:

- *Adição:*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

- *Multiplicação:*

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd).$$

- (a) Se adicionarmos a convenção de que

$$(ab, a + b) = (b, a)$$

mostre que este conjunto com essas operações forma um campo numérico.

- (b) Que campo numérico é esse? □

Problema 13.3 Considere o conjunto de pares ordenados de números reais, $\{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$, e defina adição e multiplicação como segue:

- *Adição:*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

- *Multiplicação:*

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

- (a) Mostre que este conjunto com estas operações forma um campo numérico.
- (b) Qual campo numérico é esse?

□

13.2 Construindo os Números Reais

Ao contrário do título desta secção, não construiremos aqui rigorosamente os números reais. Em vez disso, o nosso objectivo é mostrar porque é que tal construção é logicamente necessária e dar uma ideia de algumas das formas como isto foi conseguido no passado. Isto pode parecer estranho dada a nossa ênfase uniforme no rigor matemático, especialmente na terceira parte do texto, mas há boas razões para isso.

Uma delas é a praticidade simples. O facto é que construir rigorosamente os números reais e depois mostrar que eles têm as propriedades exigidas é um trabalho extraordinariamente detalhado, mesmo para a matemática. Se quisermos manter este texto em um tamanho gerenciável (nós queremos), simplesmente não temos espaço.

A segunda razão é que, até onde sabemos, há muito pouco a ganhar com isso. Quando terminarmos, teremos os números reais. Os mesmos números reais que você usou durante toda a sua vida. Eles têm as mesmas propriedades e peculiaridades que sempre tiveram. É certo que não terão perdido nada do seu encanto; Eles serão a mesma mistura deliciosa do mundano e do bizarro, e ainda vale a pena explorar e conhecer melhor. Mas nada do que fizemos no processo de construí-los logicamente a partir de ideias mais simples ajudará nessa exploração.

Uma pergunta razoável então é: “Por que se preocupar?” Se o processo é esmagadoramente e tediosamente detalhado (é) e não nos dá nada de novo para nossos esforços, por que fazê-lo?

Por Andrew Wiles, o homem que provou o Último Teorema de Fermat.

Fazer matemática já foi comparado a entrar em um quarto escuro. No começo você está perdido. O layout da sala e os móveis são desconhecidos, então você se atrapalha um pouco e aos poucos vai tendo uma noção do ambiente imediato, talvez uma vaga noção da organização da sala como um todo. Eventualmente, depois de muita exploração, muitas vezes tediosa, você se sente bastante confortável em seu quarto. Mas sempre haverá cantos escuros; áreas escondidas que você ainda não explorou. Uma área tão escura pode esconder qualquer coisa; as travas de portas fechadas que você não sabia que estavam lá; uma pinça cuja presença explica por que não era possível mover aquela mesinha no canto; até mesmo o interruptor de luz que permitiria iluminar uma área com mais clareza do que você imaginaria ser possível.

Mas, e este é o ponto, não há como saber o que você encontrará lá até entrar naquele canto escuro e começar a explorar. Talvez nada. Mas talvez

algo maravilhoso.

Foi o que aconteceu no final do século XIX. Os números reais foram usados desde que os pitagóricos aprenderam que $\sqrt{2}$ era irracional. Mas, na verdade, a maioria dos cálculos foram (e ainda são) feitos apenas com números racionais. Além disso, como $\mathbb{Q}$ forma um “conjunto de medida zero,” fica claro que a maioria dos números reais ficaram completamente sem uso. O conjunto dos números reais era, portanto, um daqueles “cantos escuros” da matemática. Tinha que ser explorado.

Medir conjuntos de zero. Veja [Corollary 12.20](#) de [Chapter 12](#).

“Mas mesmo que isso seja verdade”, você pode perguntar, “Eu não tenho interesse nos fundamentos lógicos dos números reais, especialmente se tal conhecimento não me disser nada. já sabe. Por que preciso saber todos os detalhes da construção de $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$?”

A resposta para isso é muito simples: você não.

Essa é a outra razão pela qual não estamos cobrindo todos os detalhes deste material. Explicaremos o suficiente para iluminar, talvez vagamente, este cantinho da matemática. Mais tarde, caso você precise (ou queira) voltar a isso e explorar mais, você terá uma base para começar. Nada mais.

Até o século XIX, a geometria de Euclides, tal como apresentada em seu livro *Os Elementos*, era universalmente considerada a pedra de toque da perfeição matemática. Essa crença estava tão profundamente arraigada na cultura ocidental que, recentemente, em 1923, Edna St. Vincent Millay abriu um dos poemas de seu livro *The Harp Weaver and Other Poems* com a frase “Euclides sozinho olhou para a beleza nu.”

Euclides começa seu livro enunciando (5) axiomas simples e prossegue, passo a passo lógico, na construção de sua geometria. Embora longe da perfeição real, seus métodos são limpos, precisos e eficientes — ele chega ao Teorema de Pitágoras em apenas 47 etapas (teoremas) — e ainda hoje os *Elementos* de Euclides ainda definem um padrão muito alto de exposição matemática e parcimônia.

O objetivo de começar com o que é claro e simples e prosseguir de forma lógica e rigorosa até o que é complexo ainda é um princípio orientador de toda a matemática por diversas razões. No final do século XIX, este princípio foi aplicado aos números reais. Isto é, algumas propriedades dos números reais que à primeira vista parecem simples e intuitivamente claras revelam-se, num exame mais atento, como vimos, bastante contra-intuitivas. Isso por si só não é realmente um problema. Podemos ter propriedades contra-intuitivas em nossa matemática — na verdade, isso é uma grande parte do que torna a matemática interessante — desde que cheguemos a elas logicamente, partindo de suposições simples da mesma forma que Euclides fez.

Tendo chegado a uma visão dos números reais que é comparável à dos nossos colegas do século XIX, deve agora ficar claro que os números reais e as suas propriedades devem ser construídos a partir de conceitos mais simples, como sugerido pelos nossos amigos italianos na seção anterior.

Além das propriedades que descobrimos até agora, ambos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ compartilham outra propriedade que será útil. Usámo-lo ao longo deste texto, mas até agora não o tornámos explícito. Ambos são *ordenados linearmente*. Agora tornaremos esta propriedade explícita.

Definição 13.4 Ordenação Linear. Diz-se que um campo numérico é *ordenado linearmente* se houver uma relação, denotada “ $<$ ”, nos elementos do campo que satisfaça todos os seguintes itens para todo x, y e z no campo.

1. Para todos os números x e y no campo, exatamente um dos seguintes é

válido:

- (a) $x < y$
- (b) $x = y$
- (c) $y < x$

- 2. Se $x < y$, então $x + z < y + z$ para todos os z no campo.
- 3. Se $x < y$ e $0 < z$, então $x \cdot z < y \cdot z$.
- 4. Se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$.

◇

Qualquer campo numérico com tal relação é chamado de **campo numérico ordenado linearmente** e, como mostra o problema a seguir, nem todo campo numérico é ordenado linearmente.

Problema 13.5

- (a) Prove que o seguinte deve ser válido em *qualquer* campo numérico ordenado linearmente.
 - (a) $0 < x$ se e somente se $-x < 0$.
 - (b) Se $x < y$ e $z < 0$ então $y \cdot z < x \cdot z$.
 - (c) Para todos $x \neq 0$, $0 < x^2$.
 - (d) $0 < 1$.
- (b) Mostre que o conjunto de números complexos ($\mathbb{C}$) não é um corpo ordenado linearmente.

□

Em uma apresentação completa e rigorosa, assumiríamos agora a existência dos números naturais ($\mathbb{N}$), e suas propriedades e as usaríamos para definir os inteiros, ($\mathbb{Z}$). Usaríamos então os inteiros para definir os números racionais, ($\mathbb{Q}$). Poderíamos então mostrar que os racionais satisfazem os axiomas de campo elaborados na seção anterior e que são ordenados linearmente.

Então — finalmente — usaríamos $\mathbb{Q}$ para definir os números reais ($\mathbb{R}$), mostraríamos que estes também satisfazem os axiomas de campo e também possuem as outras propriedades que esperamos : Continuidade, propriedade do intervalo aninhado, propriedade do limite mínimo superior, teorema de Bolzano-Weierstrass, convergência de todas as sequências de Cauchy e ordenação linear.

Começaríamos com os números naturais porque eles parecem ser suficientemente simples para que possamos simplesmente assumir as suas propriedades. Como disse Leopold Kronecker (1823-1891): “Deus fez os números naturais, todo o resto é obra do homem”.

Infelizmente, isso é muito para caber neste epílogo, então teremos que abreviar o processo de forma bastante severa.

Assumiremos a existência e as propriedades dos números racionais. Construir $\mathbb{Q}$ a partir de inteiros não é especialmente difícil e é fácil mostrar que eles satisfazem os axiomas elaborados por Salviati, Sagredo e Simplicio na seção anterior. Mas o nível de detalhe necessário para o rigor rapidamente se torna oneroso.

Mesmo começando nesta posição bastante avançada na cadeia lógica, ainda é necessário um nível considerável de detalhe para completar o processo. Portanto nossa exposição estará necessariamente incompleta.

Em vez de mostrar, com todo o rigor, como os números reais podem ser construídos a partir de dados racionais, mostraremos, em termos bastante gerais, três formas como isto foi feito no passado. Forneceremos referências posteriormente caso você queira acompanhar e saber mais.

13.2.1 A Expansão Decimal

Este é de longe o método mais direto que examinaremos. Como começamos com $\mathbb{Q}$, já temos alguns números cuja expansão decimal é infinita. Por exemplo, $\frac{1}{3} = 0,333\dots$. Também sabemos que se $x \in \mathbb{Q}$ então expressar x como um decimal resulta em um decimal finito ou *repetitivo infinito*.

De forma mais simples, podemos dizer que $\mathbb{Q}$ consiste no conjunto de todas as expressões decimais que eventualmente se repetem. (Se eventualmente repetir zeros, então é o que chamamos de decimal finito.)

Definimos então os números reais como o conjunto de todos os decimais infinitos, repetidos ou não.

Pode parecer que tudo o que precisamos fazer é definir a adição e a multiplicação da maneira óbvia e estamos acabados. Este conjunto com estas definições satisfaz obviamente todos os axiomas de campo elaborados pelos nossos amigos italianos na seção anterior. Além disso, parece claro que todos os nossos axiomas de completude equivalentes são satisfeitos.

No entanto, as coisas não são tão claras quanto parecem.

A principal dificuldade nesta abordagem é que a representação decimal dos números reais é tão familiar que tudo o que precisamos para mostrar parece óbvio. Mas pare e pense por um momento. É realmente óbvio como definir adição e multiplicação de *infinitos* decimais? Considere o algoritmo de adição que todos aprendemos na escola primária. Esse algoritmo exige que alinhemos dois números em suas casas decimais:

$$\begin{array}{r} d_1d_2.d_3d_4 \\ + \delta_1\delta_2.\delta_3\delta_4. \end{array}$$

Em seguida, começamos a adicionar na coluna mais à direita e prosseguimos para a esquerda. *Mas se nossos decimais forem infinitos não poderemos começar porque não existe uma coluna mais à direita!*

Um problema semelhante ocorre com a multiplicação.

Portanto, nosso primeiro problema é definir adição e multiplicação em $\mathbb{R}$ de uma maneira que recapture adição e multiplicação em $\mathbb{Q}$.

Esta não é uma tarefa trivial.

Uma maneira de proceder é reconhecer que a notação decimal que usamos durante toda a nossa vida é, na verdade, uma abreviatura para a soma de uma série infinita. Ou seja, se $x = 0.d_1d_2d_3\dots$ onde $0 \leq d_i \leq 9$ para todos $i \in \mathbb{N}$ então

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i}{10^i}.$$

A adição agora é aparentemente fácil de definir: Se $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i}{10^i}$ e $y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_i}{10^i}$ então

$$x + y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{10^i} \text{ onde } e_i = d_i + \delta_i.$$

Mas há um problema. Suponha que para algum $j \in \mathbb{N}$, $e_j = d_j + \delta_j > 10$. Nesse caso, nossa soma não satisfaz a condição $0 \leq e_j \leq 9$ então nem está claro que a expressão $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e_j}{10^j}$ representa um número real. Ou seja, podemos não

ter a propriedade de fechamento de um campo numérico. Teremos que definir algum tipo de operação “carrying” para lidar com isso.

Problema 13.6 Definir adição em decimais infinitos de maneira fechada.

Dica. Encontre uma operação “carry” apropriada para nossa definição. $\square$

Uma dificuldade semelhante surge quando tentamos definir a multiplicação. Assim que tivermos uma noção de transporte, poderíamos definir a multiplicação apenas como a multiplicação de séries. Especificamente, poderíamos definir

$$\begin{aligned} (0.a_1a_2a_3\dots) \cdot (0.b_1b_2b_3\dots) &= \left(\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots\right) \cdot \left(\frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \dots\right) \\ &= \frac{a_1b_1}{10^2} + \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{10^3} + \frac{a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1}{10^4} + \dots \end{aligned}$$

Poderíamos então converter isso em um decimal “adequado” usando nossa operação de transporte.

Mais uma vez, o diabo está nos detalhes para mostrar que tais operações algébricas satisfazem tudo o que desejamos. Mesmo assim, precisamos nos preocupar em ordenar linearmente esses números e nosso axioma de completude.

Outra maneira de ver isso é pensar em uma representação decimal infinita como uma sequência (Cauchy) de aproximações decimais finitas. Como sabemos como somar e multiplicar representações decimais finitas, podemos simplesmente somar e multiplicar os termos individuais nas sequências. É claro que não há razão para nos restringirmos apenas a esses tipos específicos de sequências de Cauchy, como veremos em nossa próxima abordagem.

13.2.2 Sequências de Cauchy

Como vimos, Georg Cantor começou sua carreira estudando séries de Fourier e rapidamente passou para assuntos mais fundamentais na teoria dos conjuntos infinitos.

Mas ele não perdeu o fascínio pela análise real quando seguiu em frente. Como muitos matemáticos de sua época, ele percebeu a necessidade de construir $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$. Ele e seu amigo e mentor Richard Dedekind (cuja abordagem veremos na próxima seção) encontraram maneiras diferentes de construir $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$.

Cantor começou com sequências de Cauchy em $\mathbb{Q}$.

Ou seja, consideramos o conjunto de todas as sequências de Cauchy de números racionais. Gostaríamos de *definir* cada uma dessas sequências como um número real. O objetivo deve ser claro. Se $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em $\mathbb{Q}$ que converge para $\sqrt{2}$ então chamaremos (s_n) o número real $\sqrt{2}$.

Isso provavelmente parece um pouco surpreendente no início. Há muitos *muitos* números em (s_n) (infinitamente contáveis, para ser preciso) e estamos propondo colocar todos eles em um saco grande, amarrando-o com uma fita, e chamando tudo de $\sqrt{2}$. Parece algo muito estranho de se propor, mas lembre-se da discussão na seção anterior que deixamos o conceito de “número” indefinido. Assim, se pudermos pegar *qualquer* conjunto de objetos e definir adição e multiplicação de tal forma que os axiomas de campo sejam satisfeitos, então esses objetos são legitimamente números. Para mostrar que eles são, de fato, os números *reais* precisaremos também da propriedade de completude.

Um saco cheio de números racionais funciona tão bem quanto qualquer coisa se pudermos definir adição e multiplicação adequadamente.

Nosso problema imediato, porém, não é a adição ou multiplicação, mas a singularidade. Se pegarmos uma sequência (s_n) que converge para $\sqrt{2}$ e

defini-la como $\sqrt{2}$, o que faremos com todas as outras seqüências que convergem para $\sqrt{2}$?

Além disso, temos que ter cuidado para não nos referirmos a quaisquer números reais, como a raiz quadrada de dois, por exemplo, ao definirmos os números reais. Esta seria uma definição — circular e, portanto, inútil. Obviamente, porém, podemos nos referir a números *racionais*, já que estas são as ferramentas que usaremos.

A solução é clara. Pegamos *todas* seqüências de números racionais que convergem para $\sqrt{2}$, jogamos elas em nossa bolsa e chamamos *that* $\sqrt{2}$. Nossa bolsa está ficando bem cheia agora.

Mas precisamos fazer isso sem usar $\sqrt{2}$ porque é um número real. As duas definições a seguir satisfazem todas as nossas necessidades.

Definição 13.7 Sejam $x = (s_n)_{n=1}^{\infty}$ e $y = (\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ são seqüências de Cauchy em $\mathbb{Q}$. x e y são considerados equivalentes se satisfazem a seguinte propriedade: Para cada $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, existe um número racional N tal que para todos $n > N$, $n \in \mathbb{N}$,

$$|s_n - \sigma_n| < \varepsilon.$$

Denotaremos a equivalência escrevendo $x \equiv y$. ◇

Problema 13.8 Mostre que:

- (a) $x \equiv x$
- (b) $x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$
- (c) $x \equiv y$ e $y \equiv z \Rightarrow x \equiv z$

□

Definição 13.9 Cada conjunto de todas as seqüências de Cauchy equivalentes define um número real. ◇

Uma característica muito interessante do método de Cantor é que fica muito claro como a adição e a multiplicação devem ser definidas.

Definição 13.10 If

$$x = \{ (s_n)_{k=1}^{\infty} \mid (s_n)_{k=1}^{\infty} \text{ é Cauchy em } \mathbb{Q} \}$$

e

$$y = \{ (\sigma_n)_{k=1}^{\infty} \mid (\sigma_n)_{k=1}^{\infty} \text{ é Cauchy em } \mathbb{Q} \}$$

então definimos o seguinte:

- *Adição:*

$$x + y = \{ (t_n)_{k=1}^{\infty} \mid t_k = s_k + \sigma_k, \forall (s_n) \in x, \text{ e } (\sigma_n) \in y \}$$

- *Multiplicação:*

$$x \cdot y = \{ (t_n)_{k=1}^{\infty} \mid t_k = s_k \sigma_k, \forall (s_n) \in x, \text{ e } (\sigma_n) \in y \}$$

◇

A notação usada em [Definition 13.9](#) pode ser difícil de ler no início, mas basicamente diz que adição e multiplicação são feitas componente- sábio. No entanto, como x e y consistem em todas as seqüências equivalentes, temos que fazer *todas* escolhas possíveis de $(s_n) \in x$ e $(\sigma_n) \in y$, forme a soma (produto) $(s_n + \sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ ($(s_n \sigma_n)_{n=1}^{\infty}$) e então mostre que todas essas somas (produtos) são equivalentes. Caso contrário, a adição (multiplicação) não está bem definida: dependeria de qual seqüência escolhemos para representar x e y .

Problema 13.11 Sejam x e y números reais (ou seja, sejam eles ser conjuntos de seqüências de Cauchy equivalentes em $\mathbb{Q}$). Se (s_n) e (t_n) estão em x e (σ_n) e (τ_n) estão em y então

$$(s_n + \tau_n)_{n=1}^{\infty} \equiv (\sigma_n + t_n)_{n=1}^{\infty}.$$

□

Teorema 13.12 Seja 0^* o conjunto de seqüências de Cauchy em $\mathbb{Q}$ que são todas equivalentes à seqüência $(0, 0, 0, \dots)$. Então

$$0^* + x = x.$$

Proof. De [Problem 13.11](#) fica claro que na formação de $0^* + x$ podemos escolher qualquer seqüência em 0^* para representar 0^* e qualquer seqüência em x para representar x . (Isso ocorre porque qualquer outra escolha produzirá uma seqüência equivalente a $0^* + x$.)

Assim, escolhamos $(0, 0, 0, \dots)$ para representar 0^* e qualquer elemento de x , digamos $(x_1, x_2, \dots)$, para representar x . Então

$$\begin{aligned} (0, 0, 0, \dots) + (x_1, x_2, x_3, \dots) &= (x_1, x_2, x_3, \dots) \\ &= x. \end{aligned}$$

Como quaisquer outras seqüências obtidas de 0^* e x respectivamente, produzirão uma soma equivalente a x (veja [Problem 13.8](#)) concluímos que

$$0^* + x = x.$$

■

Problema 13.13 Identifique o conjunto de seqüências de Cauchy equivalentes, 1^* , tais que

$$1^* \cdot x = x.$$

□

Problema 13.14 Sejam x, y e z números reais (conjuntos equivalentes de seqüências de Cauchy). Mostre que com adição e multiplicação definidas como acima temos:

- (a) $x + y = y + x$
- (b) $(x + y) + z = x + (y + z)$
- (c) $x \cdot y = y \cdot x$
- (d) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- (e) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

□

Não abordaremos esse assunto aqui, mas você deve pensar um pouco sobre como isso pode ser feito.

Uma vez estabelecida a existência de inversos aditivos e multiplicativos, a coleção de todos os conjuntos de seqüências de Cauchy equivalentes, com adição e multiplicação definidas como acima satisfazem todos os axiomas de campo. É claro que eles formam um campo numérico e, portanto, merecem ser chamados de números.

No entanto, isso não mostra necessariamente que eles formam $\mathbb{R}$. Também precisamos mostrar que eles são completos no sentido de [Chapter 10](#). Talvez

não seja muito surpreendente que, quando construímos os números reais usando sequências de Cauchy equivalentes, a propriedade de completude mais natural que podemos mostrar é que se uma sequência de números reais é de Cauchy, então ela converge.

No entanto, não estamos em condições de mostrar que as sequências de Cauchy em $\mathbb{R}$ convergem. Para fazer isso, primeiro precisaríamos mostrar que esses conjuntos de classes de equivalência de sequências de Cauchy (números reais) são ordenados linearmente.

Infelizmente, mostrar a ordem linear, embora não seja especialmente difícil, é demorado. Portanto, invocaremos novamente as prerrogativas do professor e deixaremos de lado todas as dificuldades com a afirmação de que é simples mostrar que os números reais, tal como os construímos nesta seção, estão ordenados linearmente e são completos. Se você quiser ver esta construção com todo o rigor, recomendamos o livro *The Number System* de H. A. Thurston [16].

Thurston primeiro constrói $\mathbb{R}$ conforme indicamos nesta seção. Então, como observação final, ele mostra que os números reais devem ser exatamente as casas decimais infinitas que vimos na seção anterior.

13.2.3 Dedekind Cuts

Uma vantagem de construir os reais por meio de sequências de Cauchy na seção anterior é que, uma vez identificadas sequências equivalentes com números reais, fica *muito* claro como a adição e a multiplicação devem ser definidas.

Por outro lado, antes mesmo de começarmos a compreender essa construção, precisamos de uma noção bastante forte do que significa convergir uma sequência e de experiência suficiente com sequências para nos sentirmos confortáveis com a noção de uma sequência de Cauchy. Assim, uma boa parte da matemática de alto nível deve ser dominada antes mesmo de podermos começar.

O método de “cortes de Dedekind” desenvolvido pela primeira vez por Richard Dedekind (embora ele os chamasse apenas de “cortes”) em seu livro de 1872, *Continuity and the Irrational Numbers* compartilha a vantagem do método da sequência de Cauchy porque, uma vez identificados os candidatos para os números reais, fica muito claro como a adição e a multiplicação devem ser definidas. Também é simples mostrar que a maioria dos axiomas de campo são satisfeitos.

“Claro” não significa “fácil de fazer” como veremos.

Além disso, o método de Dedekind também tem a vantagem de exigir muito pouco conhecimento matemático para começar. Isso é intencional. No prefácio da primeira edição de seu livro, Dedekind afirma:

Este livro de memórias pode ser compreendido por qualquer pessoa que possua o que normalmente se chama de bom senso; nenhum conhecimento técnico filosófico ou matemático é necessário no mínimo grau. (citado em [5])

Embora ele possa ter exagerado um pouco, é claro que sua intenção era argumentar a partir de primeiros princípios muito simples, assim como Euclides fez.

Seu ponto de partida foi a observação que fizemos em [Chapter 3](#): A reta numérica racional está cheia de buracos. Mais precisamente podemos “cortar” a linha racional de duas maneiras distintas:

1. Podemos escolher um número racional, r . Esta escolha divide todos os outros números racionais em duas classes: aqueles maiores que r e aqueles menores que r .
2. Podemos escolher um dos buracos na reta numérica racional. Neste caso *todos* os racionais se enquadram em duas classes: aqueles maiores que o buraco e aqueles menores.

Mas falar de números racionais como menores ou maiores do que algo que não é, é um total absurdo. Precisaremos de uma definição melhor (isto é, rigorosa).

Como antes, desenvolveremos um sentido geral desta construção, em vez de uma apresentação totalmente detalhada, pois esta última seria demasiado longa para incluir.

Nossa apresentação seguirá de perto a de Edmund Landau em seu clássico texto de 1951 *Foundations of Analysis* [7]. Fazemos isso para que caso você opte por aprofundar essa construção você consiga acompanhar com mais facilidade a apresentação de Landau.

Definição 13.15 Corte Dedekind

Um conjunto de números racionais *positivos* é chamado de *corte* if

Observe especialmente que não estamos usando números racionais negativos ou zero para construir nossos cortes. A razão para isso ficará clara em breve.

- | | |
|------------------------|---|
| Propriedade I | Ele contém um número racional positivo, mas não contém todos os números racionais positivos. |
| Propriedade II | Todo número racional positivo no conjunto é menor que todo número racional positivo que não está no conjunto. |
| Propriedade III | Não existe nenhum elemento do conjunto que seja maior que todos os outros elementos do conjunto. |

◇

Dado o público-alvo, Dedekind e Landau evitaram usar muita notação. No entanto, incluiremos o seguinte para aqueles que se sentem mais confortáveis com o simbolismo, pois pode ajudar a fornecer mais perspectiva. Especificamente, as propriedades que definem um corte Dedekind α podem ser escritas como segue.

- | | |
|------------------------|--|
| Propriedade I | $\alpha \neq \emptyset$ e $\mathbb{Q}^+ - \alpha \neq \emptyset$. |
| Propriedade II | Se $x \in \alpha$ e $y \in \mathbb{Q}^+ - \alpha$, então $x < y$. (Alternativamente, se $x \in \alpha$ e $y < x$, então $y \in \alpha$.) |
| Propriedade III | Se $x \in \alpha$, então $\exists z \in \alpha$ tal que $x < z$. |

As propriedades I-III realmente dizem que os cortes de Dedekind são intervalos abertos limitados de números racionais começando em 0. Por exemplo, $(0, 3) \cap \mathbb{Q}^+$ é um corte de Dedekind (que eventualmente será o número real 3). Da mesma forma, $\{x | x^2 < 2\} \cap \mathbb{Q}^+$ é um corte de Dedekind (que eventualmente será o número real $\sqrt{2}$). Observe que deve-se tomar cuidado para não se referir realmente a números irracionais nas propriedades, pois o objetivo é construí-los a partir de números racionais, mas isso pode ajudar a prepará-lo para antecipar o que acontecerá.

Preste atenção especial aos três fatos a seguir:

1. É necessário muito pouco conhecimento matemático para compreender esta definição. Precisamos saber o que é um conjunto, precisamos saber o

que é um número racional e precisamos saber que, dados dois números racionais positivos, ou eles são iguais ou um é maior.

2. A linguagem que Landau usa é *muito* precisa. Isso é necessário para evitar bobagens como tentar comparar algo com nada, como fizemos alguns parágrafos acima.
3. Estamos usando apenas números racionais *positivos* para nossa construção. A razão para isto ficará clara em breve. Por enquanto, do ponto de vista prático, isso significa que os cortes que acabamos de definir irão (eventualmente) corresponder aos números reais *positivos*.

Definição 13.16 Sejam α e β cortes. Então dizemos que α é menor que β e escrevemos

$$\alpha < \beta$$

se houver um número racional em β que não está em α . $\diamond$

Observe que, à luz do que dissemos antes de [Definição 13.16](#) (que é obtido diretamente de Landau), notamos o seguinte.

Teorema 13.17 *Sejam α e β cortes. Então $\alpha < \beta$ se e somente se $\alpha \subset \beta$.*

Problema 13.18 Prove [Teorema ??](#) e use isso para concluir que se α e β são cortes então exatamente uma das seguintes afirmações é verdadeira:

1. $\alpha = \beta$.
2. $\alpha < \beta$.
3. $\beta < \alpha$.

$\square$

Precisaremos primeiro definir adição e multiplicação para nossos cortes e, eventualmente, estes precisarão ser estendidos para $\mathbb{R}$ (uma vez que os reais não positivos também tenham sido construídos). Será necessário mostrar que as definições estendidas satisfazem os axiomas de campo. Como você pode ver, há muito o que fazer.

Como fizemos com as seqüências de Cauchy e com decimais infinitos, pararemos bem antes da construção completa. Se você estiver interessado em explorar os detalhes da construção de Dedekind, o livro de Landau [\[7\]](#) é muito completo e foi escrito com a intenção explícita que seria acessível aos alunos. Em seu “Prefácio para o Professor” ele diz

Espero ter escrito este livro, depois de uma preparação que se estendeu por décadas, de tal forma que um estudante normal possa lê-lo em dois dias.

Isso pode estar esticando as coisas. Reserve pelo menos uma semana e certifique-se de não ter mais nada para fazer naquela semana.

Adição e multiplicação são definidas da maneira óbvia.

Definição 13.19 Adição em cortes

Sejam α e β cortes. Denotaremos o conjunto $\{x + y | x \in \alpha, y \in \beta\}$ por $\alpha + \beta$. $\diamond$

Definição 13.20 Multiplicação em cortes

Sejam α e β cortes. Denotaremos o conjunto $\{xy | x \in \alpha, y \in \beta\}$ por $\alpha\beta$ ou $\alpha \cdot \beta$. $\diamond$

Se quisermos ter esperança de que estes objetos servirão como nossos números reais, devemos ter fechamento em relação à adição e multiplicação. Mostraremos o fechamento em relação à adição.

Teorema 13.21 *Encerramento com relação à adição*

Se α e β são cortes então $\alpha + \beta$ é um corte.

Proof. Precisamos mostrar que o conjunto $\alpha + \beta$ satisfaz todas as três propriedades de um corte.

Propriedade I Seja x qualquer número racional em α e seja x_1 um número racional que não está em α . Então pela Propriedade II $x < x_1$.
Seja y qualquer número racional em β e seja y_1 um número racional que não está em β . Então pela Propriedade II $y < y_1$.

Assim, como $x + y$ representa um elemento genérico de $\alpha + \beta$ e $x + y < x_1 + y_1$, segue-se que $x_1 + y_1 \notin \alpha + \beta$.

Propriedade II Mostraremos que a contrapositiva de **Propriedade II** é verdadeira: Se $x \in \alpha + \beta$ e $y < x$ então $y \in \alpha + \beta$.
Primeiro, seja $x \in \alpha + \beta$. Então existem $x_\alpha \in \alpha$ e $x_\beta \in \beta$ tais que $y < x = x_\alpha + x_\beta$. Portanto $\frac{y}{x_\alpha + x_\beta} < 1$, de modo que

$$x_\alpha \left(\frac{y}{x_\alpha + x_\beta} \right) < x_\alpha$$

e

$$x_\beta \left(\frac{y}{x_\alpha + x_\beta} \right) < x_\beta.$$

Portanto $x_\alpha \left(\frac{y}{x_\alpha + x_\beta} \right) \in \alpha$ e $x_\beta \left(\frac{y}{x_\alpha + x_\beta} \right) \in \beta$. Portanto

$$y = x_\alpha \left(\frac{y}{x_\alpha + x_\beta} \right) + x_\beta \left(\frac{y}{x_\alpha + x_\beta} \right) \in \alpha + \beta.$$

Propriedade III Seja $z \in \alpha + \beta$. Precisamos encontrar $w > z$, $w \in \alpha + \beta$. Observe isso para alguns $x \in \alpha$ e $y \in \beta$

$$z = x + y.$$

Como α é um corte, existe um número racional $x_1 \in \alpha$ tal que $x_1 > x$. Pegue $w = x_1 + y \in \alpha + \beta$. Então

$$w = x_1 + y > x + y = z.$$

■

Problema 13.22 Mostre que se α e β são cortes então $\alpha \cdot \beta$ também é um corte. □

Neste ponto construímos nossos cortes e definimos adição e multiplicação para cortes. Contudo, como observado anteriormente, os cortes que teremos (muito em breve) corresponderão apenas aos números reais positivos. Isto pode parecer um problema, mas na verdade não é, porque os números reais não positivos podem ser definidos em termos dos positivos, ou seja, em termos dos nossos cortes. Citamos Landau [7]:

Esses cortes serão doravante chamados de “números positivos”; . . .

Criamos um novo número 0 (para ser lido “zero”), distinto dos números positivos.

Também criamos números que são distintos dos números positivos e também distintos de zero, e que chamaremos de números negativos, de tal forma que a cada ξ (ou seja, a cada número positivo) atribuímos um número negativo denotado por $-\xi$ (– para ser lido “menos”). Neste, $-\xi$ e $-\nu$ serão considerados como o mesmo número (como iguais) se e somente se ξ e ν forem o mesmo número.

A totalidade constituída por todos os números positivos, de 0, e por todos os números negativos, será chamada de números reais.

É claro que não é suficiente simplesmente postular a existência dos números reais não negativos.

Tudo o que temos até agora é um conjunto de objetos que chamamos de números reais. Para alguns deles (os reais positivos -- ou seja, os cortes) definimos adição e multiplicação. Essas definições acabarão por corresponder à adição e multiplicação com as quais estamos familiarizados.

No entanto, não temos nenhuma das operações para todo o nosso conjunto de números reais propostos. Antes de fazermos isso, precisamos primeiro definir o *valor absoluto* de um número real. Este é um conceito com o qual você está muito familiarizado e provavelmente já viu a seguinte definição: Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{if } \alpha \geq 0, \\ -\alpha & \text{if } \alpha < 0. \end{cases}$$

Infelizmente não podemos usar esta definição porque ainda não temos uma ordenação linear em $\mathbb{R}$ então a afirmação $\alpha \geq 0$ não tem sentido. Na verdade, será a nossa definição de valor absoluto que ordenará os números reais. Devemos ter cuidado.

Observe que, por definição, um número real negativo é denotado com um traço (‘-’) na frente. Isso é χ é positivo enquanto $-\chi$ é negativo. Assim, se A for *qualquer* número real, então uma das seguintes afirmações é verdadeira:

1. $A = \chi$ para alguns $\chi \in \mathbb{R}$ (A é positivo)
2. $A = -\chi$ para algum $\chi \in \mathbb{R}$ (A é negativo)
3. $A = 0$.

Definimos o valor absoluto da seguinte forma:

Definição 13.23 Seja $A \in \mathbb{R}$ como acima. Então

$$|A| = \begin{cases} \chi & \text{if } A = \chi \\ 0 & \text{if } A = 0 \\ \chi & \text{if } A = -\chi. \end{cases}$$

◇

Com esta definição em vigor, é possível mostrar que $\mathbb{R}$ é ordenado linearmente. Não faremos isso explicitamente. Em vez disso, simplesmente assumiremos que os símbolos “<” “>,” e “=” foram definidos e possuem todas as propriedades que aprendemos esperar deles.

Estendemos agora as nossas definições de adição e multiplicação dos números reais positivos (cortes) a todos eles. Curiosamente, a multiplicação é a mais simples das duas.

Definição 13.24 *Multiplicação*

Seja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} -|\alpha| |\beta| & \text{se } \alpha > 0, \beta < 0 \text{ ou } \alpha < 0, \beta > 0, \\ |\alpha| |\beta| & \text{if } \alpha < 0, \beta < 0, \\ 0 & \text{if } \alpha = 0 \text{ ou } \beta = 0. \end{cases}$$

◇

Observe que o caso em que α e β são ambos positivos já foi tratado por

Definição 13.20 porque nesse caso ambos são cortes.

A seguir definimos adição.

Definição 13.25 Adição

Deixe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então

$$\alpha + \beta = \begin{cases} -(|\alpha| + |\beta|) & \text{if } \alpha < 0, \beta < 0 \\ |\alpha| - |\beta| & \text{if } \alpha > 0, \beta < 0, |\alpha| > |\beta| \\ 0 & \text{if } \alpha > 0, \beta < 0, |\alpha| = |\beta| \\ -(|\alpha| - |\beta|) & \text{se } \alpha > 0, \beta < 0, |\alpha| < |\beta|. \\ \beta + \alpha & \text{if } \alpha < 0, \beta > 0 \\ \beta & \text{if } \alpha = 0 \\ \alpha & \text{if } \beta = 0 \end{cases}$$

◇

Observe também que o quinto caso se refere à adição conforme definida no segundo caso.

Mas espere! No segundo e quarto casos da nossa definição, definimos a adição em termos de subtração. Mas ainda não definimos a subtração! Ops!

Isso é tratado com a definição abaixo, mas esclarece muito claramente os cuidados que devem ser tomados nessas construções. Os números reais são tão familiares para nós que é extraordinariamente fácil fazer suposições injustificadas.

Como as subtrações no segundo e quarto casos acima são feitas com números positivos só precisamos dar sentido à subtração dos cortes.

Definição 13.26 Se α, β e δ são cortes então a expressão

$$\alpha - \beta = \delta$$

é definido como significando

$$\alpha = \delta + \beta.$$

◇

Claro, há o detalhe de mostrar que existe tal corte δ . (Nós avisamos você sobre o tédio de tudo isso.) Landau detalha a demonstração de que tal corte existe. Apresentaremos uma alternativa definindo o corte $\alpha - \beta$ diretamente (assumindo $\beta < \alpha$). Para motivar esta definição, considere algo com o qual estamos familiarizados: $3 - 2 = 1$. Em termos de cortes, queremos dizer que o intervalo aberto de 0 a 3 “menos” o intervalo aberto de 0 a 2 deve nos dar o intervalo aberto de 0 a 1. Pegar elementos de $(0, 3)$ e subtrair elementos de $(0, 2)$ não funcionará, pois teríamos diferenças como $2.9 - .9 = 2$ que não é no corte $(0, 1)$. Um momento de reflexão nos diz que o que precisamos fazer é pegar todos os elementos de $(0, 3)$ e subtrair todos os elementos de $(2, \infty)$, restringindo-nos apenas àqueles que são números racionais positivos. Isso solicita a seguinte definição.

Definição 13.27 Sejam α e β cortes com $\beta < \alpha$. Defina $\alpha - \beta$ como segue:

$$\alpha - \beta = \{x - y \mid x \in \alpha \text{ e } y \notin \beta\} \cap \mathbb{Q}^+.$$

◇

Para mostrar que, de fato, $\beta + (\alpha - \beta) = \alpha$, o seguinte lema técnico será útil.

Lema 13.28 *Seja β um corte, y e z números racionais positivos que não estão em β com $y < z$, e seja $\varepsilon > 0$ seja qualquer número racional. Então existem números racionais positivos r e s com $r \in \beta$, e $s \notin \beta$, tais que $s < z$ e $s - r < \varepsilon$.*

Problema 13.29 Prove [Lemma 13.28](#).

Hint. Como β é um corte, existe $r_1 \in \beta$. Seja $s_1 = y \notin \beta$. Sabemos que $r_1 < s_1 < z$. Considere o ponto médio $\frac{s_1 + r_1}{2}$. Se estiver em β então renomeie-o como r_2 e renomeie s_1 como s_2 . Se não estiver em β então renomeie-o como s_2 e renomeie r_1 como r_2 , etc. □

Problema 13.30 Sejam α e β cortados com $\beta < \alpha$. Prove que $\beta + (\alpha - \beta) = \alpha$.

Hint. É bastante simples mostrar que $\beta + (\alpha - \beta) \subseteq \alpha$. Para mostrar que $\alpha \subseteq \beta + (\alpha - \beta)$, deixamos $x \in \alpha$. Como $\beta < \alpha$, temos $y \in \alpha$ com $y \notin \beta$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $x < y$. (Por quê?) Escolha $z \in \alpha$ com $y < z$. Pelo [Lemma 13.28](#), existem números racionais positivos r e s com $r \in \beta$, $s \in \beta$, $s < z$ e $s - r < z - x$. Mostre que $x < r + (z - s)$. □

Terminaremos dizendo que não importa como você construa o sistema de números reais, na verdade só existe um. Mais precisamente, temos o seguinte teorema que afirmamos sem prova.

Na verdade, *não* provar esse resultado parece ser padrão em referências de análise reais. Na maioria das vezes, é simplesmente declarado como fazemos aqui.

Teorema 13.31 *Qualquer campo completo e ordenado linearmente é isomórfico para $\mathbb{R}$.*

Dois campos numéricos ordenados linearmente são considerados isomórficos se houver um mapeamento injetivo entre eles (tal mapeamento é chamado de bijeção) que preserva a adição, a multiplicação e a ordem. Mais precisamente, se $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são ambos campos ordenados linearmente, $x, y \in \mathcal{F}_1$ e $\phi : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ é o mapeamento então

1. $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$
2. $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$
3. $x < y \Rightarrow \phi(x) < \phi(y)$.

Lembre-se que avisamos que essas construções estavam repletas de detalhes técnicos que não são necessariamente esclarecedores. No entanto, neste ponto, você tem tudo o que precisa para mostrar que o conjunto de todos os números reais conforme definido acima é ordenado linearmente e satisfaz a propriedade Least Upper Bound.

Mas vamos parar aqui para, parafraseando Descartes, deixar para você a alegria de novas descobertas.

Referências

- [1] Robert E. Bradley and C. Edward Sandifer. *Cauchy's Cours d'analyse: An Annotated Translation*. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. Springer, 2009.
- [2] William Dunham. *Journey Through Genius*. Penguin Books, 1990.
- [3] John Franks. Cantor's other proofs that $\mathbb{R}$ is uncountable. *Mathematics Magazine*, 83(4):283--289, October 2010.
- [4] Judith Grabiner. *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*. MIT Press, Cambridge MA, 1981.
- [5] Stephen Hawking, editor. *God Created the Integers: The Mathematical Breakthroughs that Changed History*. Running Press, Philadelphia, London, 2005.
- [6] H. Jahnke, editor. *A History of Analysis*. AMS Publications, Providence RI, 2003.
- [7] Edmund Landau. *Foundations of Analysis*. Chelsea Publishing Company, New York, NY, 1966. Translated by F. Steinhardt, Columbia University.
- [8] Thomas Levenson. *Newton and the Counterfeiter*. Houghton Mifflin Harcourt, 2009.
- [9] Reviel Netz and William Noel. *The Archimedes Codex*. Da Capo Press, 2007.
- [10] Isaac Newton. *Sir Isaac Newton's Two Treatises of the Quadrature of Curves and Analysis by Equation of an Infinite Number of Terms, Explained*. Society for the Encouragement of Learning, 1745. Translated from Latin by John Stewart, A. M. Professor of Mathematicks in the Marishal College and University of Aberdeen.
- [11] J. J. O'Connor and E. F. Robertson. *The Brachistochrone Problem*. <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk>", *MacTutor History of Mathematics archive*
- [12] Abraham Robinson. *Non-standard analysis*. North-Holland Pub. Co., 1974.
- [13] Lucio Russo, translated by Silvio Levy. *The Forgotten Revolution: How Science Was Born in 300 BC and Why It Had to Be Reborn*. Springer, 1996.
- [14] C. Edward Sandifer. *The Early Mathematics of Leonard Euler*. Spectrum, 2007. ISBN 10: 0883855593, ISBN 13: 978-0883855591.
- [15] Dirk Struik, editor. *Source Book in Mathematics, 1200-1800*. Harvard University Press, Cambridge, MA, 1969.

- [16] H. A. Thurston. *The Number System*. Blackie and Son Limited, London, Glasgow, 1956.

Índices

$\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ é contável, 144
criando irracionais a partir de
racionais, 19
números racionais existem
entre números racionais,
13
tem medida zero em $\mathbb{R}$, 144
é contável, 144
é possível ter dois números
racionais, a e b , tais que
 a^b é irracional, 19

$\mathbb{R}$

adição de seqüências de
Cauchy, 162
como seqüências de Cauchy
identifique a identidade
multiplicativa, 162
existência de números reais
entre números reais, 17
números irracionais, 19
o número 1 como uma
seqüência de Cauchy, 162
ordenando cortes de Dedekind,
165
qualquer campo completo e
ordenado linearmente é
isomórfico a, 169
é incontável
Primeira prova de Cantor,
141

$\cos(nx)$

orthogonality of, 61

$\cos x$

Taylor's series for, 46

∞

divergência para, 73
divergência positiva infinita
para, 73
infinito negativo

Divergência para, 73

π

expansão da segunda série, 38
expansão da primeira série, 37

$\sin x$

como uma série de potências,
41

ortogonalidade de, 56

Taylor's series for, 46

$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots}}}}$

value of, 121

$\sqrt{2}$

meaning of, 15

$\sqrt{x}$

é contínua em zero, 94

b é um limite superior de $S \subseteq \mathbb{R}$ se
e somente se $-b$ for um
limite inferior de $-S$, 124

e^x

$E(-x) = (E(x))^{-1}$, 33

$E(0) = 1$, 32

$E(\frac{1}{n}) = (E(1))^{1/n}$, 33

$E(m) = (E(1))^m E(0) = 1$, 33

$E(mx) = (E(x))^m$, 33

$E(x+y) = E(x)E(y)$, 32

$E(\frac{m}{n}) = (E(1))^{m/n}$, 33

$e^{a+b} = e^a e^b$, 79

definição de e , 33

Taylor's series for, 46

$g(c) = \frac{c-x}{1+c}$ is increasing on $[x, 0]$,
85

x^n

converge pontualmente em
 $[0, 1]$, 127

x^n converge pontualmente em
 $[0, 1]$, 127

Forma do Resto de Lagrange, 80

Abel, Niels Henrik, 126, 136

- Lema de Abel, 136
- Teorema de Abel, 136
- Bernoulli Jacob, 26
- Bernoulli, Johann, 25
 - Desafio de Bernoulli, 26
 - portrait of, 26
- Binomial Series, the
 - $g(c) = \frac{c-x}{1+c}$ is increasing, 85
 - converges on the interval $[0, 1]$, 83
- Bolzano, Bernhard, 90, 91, 118
 - retrato de, 91
- Brachistochrone problem, the, 25
- campo numérico
 - ordenado linearmente, 157
- Cantor, Georg, 137, 138, 140, 142, 147, 148, 160
 - e a visão moderna da matemática, 138
 - intervalo unitário e quadrado unitário têm cardinalidade igual, 145
 - primeira prova de que $\mathbb{R}$ é incontável, 141
 - quarto teorema sobre a unicidade das séries de Fourier, 140
 - retrato de, 139
 - singularidade da série de Fourier
 - primeiro teorema sobre, 138
 - segundo teorema, 138
 - terceiro teorema sobre, 138
 - Teorema de Cantor, 146
- Cardano, Girolomo, 6
- cardinalidade
 - conjuntos contáveis, 142
 - equal cardinalidade, 143
- Cauchy, Augustin, 44, 84, 91, 102, 126
 - A prova falha de Cauchy de que o limite das funções contínuas é contínua, 126
 - portrait of, 86
- conjuntos
 - conjuntos derivados, 139
 - pontos de acumulação, 139
 - subconjuntos infinitos contáveis, 147
- conjuntos contáveis
 - união contável de conjuntos finitos, 147
 - definição de, 142
- conjuntos derivados, 140
- continuidade, 91
 - $\pm\sqrt{x}$ é contínua em zero, 94
 - $f(x) = mx + b$ é contínua em todo lugar, 93
 - A prova falha de Cauchy de que o limite das funções contínuas é contínua, 126
 - definição de, 91
 - definição formal de
 - descontinuidade, 110
 - função de Heaviside não é contínua em zero, 98
 - implicada pela
 - diferenciabilidade, 107
 - Teorema do Valor Extremo (TVE) e, 91
 - Teorema do Valor Intermediário (TVI) e, 91
 - theorem de
 - Bolzano-Weierstrass implica um theorem contínuo função em um conjunto fechado é limitada, 119
 - via limites, 97, 99
- convergência
 - de uma sequência
 - Exercício de convergência para zero, 65
 - convergência pontual, 128
 - convergência pontual vs. convergência uniforme, 128
 - convergência uniforme, 128
 - de uma sequência, 67
 - convergência para zero, 66
 - implica sequência de Cauchy, 130
 - de uma série
 - absoluta, 132
 - convergência absoluta implica convergência, 132
 - ponto a ponto, 126
 - o raio de convergência de uma série de potências, 133
 - convergência pontual, 127
 - derivada e, 129
 - convergência uniforme, 127
 - funções contínuas e, 127
 - integração e, 128
- Dedekind, Richard, 145, 160,

- 163–165
- Dedekind corta, 164
 - adição de, 165, 168
 - como conjuntos, 169
 - definição de, 164
 - fechamento de, 166
 - multiplicação de, 166, 167
 - multiplicação de cortes positivos, 165
 - ordenar propriedades, 165
 - ordenação de, 165
 - subtração de, 168
 - valor absoluto, 167
- Dedekind cuts, 163
- retrato de, 145
- denominadores comuns, 13
- Desigualdades Triangulares, 69
 - Desigualdade Triangular, 69
 - Desigualdade Triangular Reversa, 69
- diferenciação
 - $f'(a) < 0$ implica que f é decrescente nas proximidades, 109
 - $f'(a) > 0$ implica que f é crescente nas proximidades, 109
 - definição da derivada, 107
 - diferenciabilidade implica continuidade, 107
 - diferenciação termo a termo de séries de potências, 129
 - do limite pontual das funções, 129
 - se $f' < 0$ em um intervalo então f é decrescente, 109
- differentiation
 - power rule with fractional exponents, 24
- divergência
 - de uma sequência, 72
 - de uma série
 - n teste do ésimo termo, 131
 - divergência ao infinito implica divergência, 74
- Equação do Calor, a, 55
- Equação do calor, a solução para $\xi(x)$, 55
- Equação do Calor, as soluções fundamentais de, 55
- Equação do Calor, o Parâmetro k deve ser menor que zero, 55
- Euler, Leonhard, 43, 47, 115
 - retrato de, 39
- Exercícios de série de Maclaurin, 41
- existem raízes quadradas, 113
- Extreme Value Theorem (EVT), 82
- fields
 - qualquer campo completo e ordenado linearmente é isomórfico a $\mathbb{R}$., 169
- Fourier Series, 60
 - divergent Fourier series example, 60
- Fourier, Jean Baptiste Joseph, 54–56, 137
 - portrait of, 54
- Função seno do topólogo
 - é contínua em zero, 96
- funções contínuas
 - a composição de funções contínuas é contínua, 101
 - a soma de funções contínuas é contínua, 99
 - convergência uniforme e, 127
 - em um conjunto fechado, e o theorem de Bolzano-Weierstrass, 119
 - função contínua em um intervalo fechado e limitado é limitada, 117
 - o limite uniforme de funções contínuas é contínuo, 127
- Gödel, Kurt
 - retrato de, 149
- Halmos, Paul, 95
 - retrato de, 95
- Heat Equation, the, 55
- Hipótese do Continuo original, 148
- Hipótese do Contínuo generalizada, 148
- Intermediate Value Theorem (IVT), 82
- Lagrange's form of the remainder $x < a$, 82
- Lagrange, Joseph-Louis, 17, 23, 43, 45, 80, 82, 102
 - portrait of, 44
- Lebesgue, Henri, 137
- Leibniz, Gottfried Wilhelm, 4, 21, 30, 35, 43, 47, 91, 102, 108, 144

- and infinitesimals, 17
- portrait of, 20
- primeira publicação de cálculo, 20
- regras de diferenciação, 21
- Lema de Abel, 136
- limit
 - de endpoints de intervalo no NIP, 113
- limite, 103
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} b^{(\frac{1}{n})} = 1$ se $b > 0$, 68
 - $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ implica que $f(x)$ é contínua, 99
 - de razões de polinômios, 75
 - de uma constante vezes uma sequência, 71
 - de uma sequência constante, 69
 - definição de não-existência, 67
 - identificando os teoremas usados em um limite, 71
 - ponto de acumulação, 139
 - pontos de acumulação, 139
 - produtos de, 70
 - propriedades de, 105, 106
 - quocientes de, 71
 - verificar leis de limites do cálculo, 106
- Limite superior, 120
- Maclaurin, Colin, 43
- Maior propriedade do limite inferior (GLBP)
 - definição de, 123
- medida zero, 144, 157
 - $\mathbb{Q}$ tem medida zero em $\mathbb{R}$, 144
- Newton, Isaac, 21, 22, 26, 35, 102, 108
 - fundamentos do cálculo, 18
 - portrait of, 23
- orthogonality
 - of $\cos nx$, 61
- ortogonalidade
 - e $\sin nx$, 56
- Paradoxo de Russell, 147
- Pequeno Teorema de Fermat, 9
 - problemas que levam a
 - se p é primo então p divide $\binom{p}{k}$, 9
 - se um primo divide um produto arbitrário, então ele divide um dos fatores, 9
 - se um primo divide um produto de dois números, então ele divide um dos fatores, 9
- polinômios
 - com grau ímpar devem ter uma raiz, 117
 - infinito, 30
- Problema da braquistócrona, a solução de Bernoulli, 27
- Problema da braquistócrona, o, 30
- Propriedade Arquimediana, 17
- Propriedade de Arquimedes, 123 e $\mathbb{Q}$, 123
- Propriedade de intervalo aninhado (NIP)
 - endpoints, 113
 - forma fraca, 140
 - implica a existência de raízes quadradas de inteiros, 115
 - implica o LUBP, 121
 - raízes quadradas de inteiros, e, 115
- Propriedade do limite mínimo superior (LUBP), 120, 124
 - identificando suprema e ímenda, 123
 - implica a propriedade do intervalo aninhado (NIP), 123
 - não é válida em $\mathbb{Q}$, 123
- Quadratic Formula
 - second proof, 7
- Riemann, Bernhard, 48
- sequences
 - Cauchy sequences
 - Cauchy's remainder, 84
 - convergence to zero, 64
 - subsequences, 117
- sequências
 - Divergência para ∞ , 73
 - limitadas e não decrescentes, 121
 - quociente termo a termo de, 71
 - somas de termos de, 69
 - a sequência de inteiros positivos diverge para o infinito, 74

- convergência, 67, 130
- convergência de
 - seqüências convergentes são limitadas, 70
- divergência de, 72
- divergência para ∞ , 74
- encontre uma seqüência
 - limitada de números racionais tal que nenhuma subsequência convirja para um número racional, 122
- múltiplos constantes de, 71
- produto termo a termo de, 71
- seqüências constantes, 69
- Seqüências de Cauchy, 129
 - adição e multiplicação de, 161
 - convergência de, 130
 - convergência de é equivalente ao NIP, 130
 - equivalente, 161
 - nem sempre convergem em $\mathbb{Q}$, 131
 - números reais como seqüências de Cauchy, 161
 - zero como uma seqüência de Cauchy, 162
- seqüências de Cauchy
 - adição de seqüências de Cauchy está bem definida, 162
- todas as subsequências de uma seqüência convergente convergem, 118
- series
 - Alternating Harmonic Series rearrangements of, 48
 - Binomial Series, the, 83
 - Binomial Series is a Taylor series, 84
 - Crítério de Cauchy, 131
 - Harmonic Series, 48
 - integração termo a termo de, 41
 - Taylor's series, 78
 - $f^{(n)} < B, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ Taylor series converges, 78
 - Cauchy Remainder, 84
 - expansion of e^x , $\sin x$, and $\cos x$, 46
 - used to approximate $\ln 2$, 48
- somas em termos de limite de, 69
- série
 - nteste do ésimo termo, 131
 - represente graficamente a série de raiz quadrada, 37
 - convergência absoluta de rearranjos, 132
 - vs. o valor absoluto de uma série, 132
 - Crítério de Cauchy
 - Crítério de Cauchy forte, 131
 - rearranjos, 132
 - Seqüências de Cauchy
 - Crítério de Cauchy, 131
 - Série geométrica
 - (0.9) converge para 1, 146
 - alternando, 40
 - derivação da representação em série de $\ln(1+x)$ de, 40
 - derivação ingênua, 31
 - diferenciando, 38
 - Série Harmônica, 132
 - divergência lenta de, 115
 - Teste de comparação, 131
- Série binomial, o
 - quadratura do, 37
- Série de Fourier
 - calculando os coeficientes, 61
- Série seno de uma função ímpar, 56
- Primeiro teorema de Cantor sobre a unicidade, 138
- Segundo teorema de Cantor sobre a unicidade, 138
- série de cosseno
 - a série de cosseno de Fourier de $f(x) = x - \frac{1}{2}$, 61
- Terceiro teorema de Cantor sobre exclusividade, 138
- série de potência
 - definição de, 31
 - de $\sin(x)$, expandido sobre , 41
- série de potências
 - derivada termo a termo de, 135
 - integral termo a termo de, 128
 - converge dentro do raio de convergência, 132
 - derivada termo a termo de, 129
 - o raio de convergência, 133
 - para a^x expandido em torno de 0, 40
 - uma série de potências diverge

- fora do seu raio de convergência, [133](#)
- séries de potências
 - convergem uniformemente em seu intervalo de convergência, [134](#)
 - drills, [40](#)
- Taylor's Formula, [42](#)
 - use to obtain the general binomial series, [46](#)
- Taylor's Theorem, [47](#)
- Taylor, Brook, [43](#)
 - portrait of, [43](#)
- Teorema de Abel, [136](#)
- Teorema de Fermat, [107](#)
 - se $f(a)$ é máximo então $f'(a) = 0$, [108](#)
 - se $f(a)$ é mínimo então $f'(a) = 0$, [108](#)
- Teorema de Rolle, [108](#)
- Teorema de Taylor, [46](#)
- Teorema do Confronto para funções, [106](#)
- Teorema do Limite
 - Squeeze para Sequências, [71](#)
- Teorema do Valor Extremo (TVE)
 - continuidade e, [91](#)
 - Teorema de Rolle, e, [108](#)
- Teorema do Valor Intermediário (TVI)
 - continuidade e, [91](#)
- Teorema do Valor Médio, [108](#), [109](#)
- Teste de Weierstrass- M , [133](#)
- Teste Weierstrass- M , [133](#)
- theorem de Bolzano-Weierstrass, [118](#)
- theorem de Bolzano-Weierstrass (BWT), [119](#)
 - implica o NIP, [122](#)
 - implica que uma função contínua em um conjunto fechado é limitada, [119](#)
- theorem do Valor Extremo (EVT), [122](#)
- theorem do Valor Intermediário (IVT), [116](#)
 - o caso $f(a) \geq v \geq f(b)$, [117](#)
 - o caso $f(a) \leq v \leq f(b)$, [116](#)
 - um polinômio com grau ímpar deve ter uma raiz, [117](#)
- Triangle Inequalities for Integrals, [78](#)
- valor absoluto, [65](#)
- Weierstrass, Karl, [90](#), [103](#), [118](#), [126](#)
 - retrato de, [90](#)